GRUNDLAGEN

EINER

ALLGEMEINEN

MANNICHFALTIGKEITSLEHRE.

EIN

MATHEMATISCH-PHILOSOPHISCHER VERSUCH

IN DER

LEHRE DES UNENDLICHEN.

VON

DR. GEORG CANTOR

ORDENTLICHER PROFESSOR A. D. UNIVERSITÄT HALLE-WITTENBERG

LEIPZIG,

COMMISSIONS-VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1883.

Notes de traduction

Texte original

Le texte original est tiré du document dont la couverture est reproduite ci-dessus. Ce texte est reproduit fidèlement dans un fichier pdf disponible également sur le site Puissance & Raison.

Notes

Comme dans le document d'origine, les notes de bas de page sont appelées par une astérisque « * », et les notes principales situées à la fin du document sont appelées un numéro suivi d'une parenthèse fermante : « n) ».

Les notes de traduction sont appelées par le signe « ↔ ».

Les notes mathématiques (du traducteur) sont appelées par le signe « M ».

Principes de traduction

Rien n'a été omis. Il s'agit d'une traduction intégrale.

Les termes en *italique* sont les italiques de Cantor, sauf les titres d'ouvrage et de publication tous mis en italique par le traducteur.

Les guillemets « … » sont les guillemets de Cantor. Aucun n'a été enlevé ni ajouté.

Quelques ajouts ont été réalisés par le traducteur et placés entre crochets […] dans le texte.

Les sauts à la ligne, retraits et alinéas sont ceux de Cantor.

Style

Dans la mesure du possible, la traduction est toujours univoque, c'est-à-dire qu'à un mot allemand (conceptuellement important) correspond toujours le même mot en français et réciproquement. Ainsi par exemple « Menge » est traduit « ensemble » et « Mannichfaltigkeit » est traduit « multiplicité » et non pas « ensemble », comme bien souvent.

Cette traduction *littérale* manque donc parfois de fluidité mais vise ce que le traducteur cherche ici à retrouver : une traduction plus conforme aux expressions d'origine de Cantor *avant* que soit formalisée, au début du XXème siècle, ce qui sera appelé la « théorie des ensembles » par la communauté mathématique « légale ».

Arnaud Bénicourt, février 2024

Fondements d’une théorie générale des multiplicités

Un essai mathématico-philosophique sur la théorie de l'infini

par

Dr. Georg Cantor

Professeur ordinaire à l’université de Halle-Wittenberg

Leipzig

1883

Avant-propos.

Le présent texte paraîtra prochainement dans les mathematischen Annalen en tant que cinquième chapitre d'un essai intitulé « *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten* »↔[1], dont les quatre premiers chapitres figurent dans les Volumes XV, XVII, XX et XXI de la même revue. Tous ces travaux sont en lien avec deux essais que j'ai publiés dans les Volumes LXXVII et LXXXIV du Journal de Borchardt↔[2], dans lesquels se trouvent déjà les principaux points de vue qui me guident dans la théorie des multiplicités [Mannichfaltigkeit]. Puisque cet essai pousse le sujet beaucoup plus loin à certains égards, et qu'il est essentiellement indépendant des essais précédents, j'ai décidé de le faire paraître à part et de lui donner un titre correspondant mieux à son contenu.

En livrant ces pages au public, je ne veux pas oublier d'indiquer que je les ai écrites en pensant avant tout à deux types de lecteurs : les philosophes qui ont suivi le développement des mathématiques jusqu'à nos jours et les mathématiciens qui sont familiarisés avec les principaux développements anciens et récents de la philosophie.

Je suis bien conscient que le sujet que je traite a de tout temps fait l'objet des opinions et des conceptions les plus diverses et que ni les mathématiciens ni les philosophes ne sont parvenus à un accord universel sur ce point. Je suis donc très loin de penser que je puisse avoir le dernier mot dans une matière aussi délicate, aussi exigeante et aussi vaste que celle que présente l'infini ; mais comme j'étais parvenu par de longues recherches à des convictions déterminées sur ce sujet, et qu'elles n'ont pas faibli tout au long de mes investigations, mais qu'elles se sont pleinement raffermies, je me suis senti obligé de les mettre en ordre et de les faire connaître.

Puis-je avoir réussi à découvrir et à exprimer ici la vérité objective à laquelle j'ai consacré tant d'efforts.

Halle, noël 1882.

L'auteur.

↔[1] « *A propos des multiplicités ponctuelles linéaires infinies* ».

↔[2] Il s'agit du Journal de Crelle édité par le mathématicien Carl Wilhelm Borchardt de 1856 à 1880. Nous conservons l'expression de Cantor.

§ 1.

La présentation que j'ai faite jusqu'ici de mes recherches en théorie des multiplicités[1)] est arrivée à un point où sa poursuite dépend d'une extension du concept de nombre entier actuel[↔1] au-delà des anciennes limites, et cette extension prend une direction qu'à ma connaissance personne n'a encore cherché à suivre.

La dépendance dans laquelle je me trouve placé à l'égard de cet élargissement du concept de nombre est si grande que sans celui-ci, il ne me serait guère possible d'accomplir sans entrave le moindre pas en avant en théorie des ensembles [Menge] ; que l'on trouve dans cette situation une justification ou, si besoin, une excuse pour introduire dans mes réflexions des idées pouvant paraître étranges. Il est en effet question d'une extension ou d'un prolongement de la série numérique des entiers actuels au-delà de l'infini ; aussi audacieux que cela puisse paraître, je peux néanmoins exprimer non seulement l'espoir mais aussi la ferme conviction qu'à terme, cette extension devra être considérée comme tout à fait simple, appropriée et naturelle. Je ne me cache pas qu'avec cette entreprise, je m'oppose quelque peu aux visions les plus répandues sur l'infini mathématique ainsi qu'aux opinions communes sur la nature de la grandeur numérique.

Pour ce qui concerne l'infini mathématique, si tant est qu'il ait trouvé jusqu'à présent une utilisation justifiée dans la science et qu'il ait contribué à son bénéfice, il me semble qu'il se présente principalement dans le rôle d'une variable, soit croissant au-delà de toute limite, soit décroissant jusqu'à une petitesse quelconque, mais restant toujours finie. J'appelle cet infini l'infini-inauthentique[↔2].

En même temps, il est apparu plus récemment, tant en géométrie qu'en théorie des fonctions notamment, une autre façon tout aussi légitime de déployer le concept d'infinitude selon laquelle, par exemple, pour l'étude d'une fonction analytique d'une grandeur variable complexe, il est devenu nécessaire et habituel de concevoir dans le plan représentant la variable complexe une singularité située à l'infini, c'est-à-dire d'imaginer un point éloigné à l'infini mais parfaitement déterminé[↔3], et d'examiner le comportement de la fonction au voisinage de ce point comme on le fait au voisinage de tout autre point ; il s'avère que le comportement de la fonction dans le voisinage du point situé à l'infini présente exactement les mêmes événements qu'en tout autre point

---

[↔1] Concernant les nombres [Zahlen], « real » est toujours traduit ici par « actuel », dans le sens d' « existant réellement ». Bien entendu, nous n'employons pas le mot « réel » qui qualifie, comme on le sait, des nombres mathématiques particuliers, dits « réels » [reellen].

[↔2] « Uneigentlich-unendliche ». Les qualificatifs « Uneigentlich » et « Eigentlich » sont utilisés par Cantor pour qualifier respectivement l'infini non actualisé, potentiel, et l'infini dit « actuel ». Les adjectifs « inauthentique » et « authentique » nous semblent traduire au mieux la pensée de Cantor. Premièrement ils fonctionnent comme une paire d'opposés et d'autre part ils transportent bien un (léger) jugement de valeur.

[↔3] « Bestimmt », l'un des mots les plus utilisés ici par Cantor, est à peu près toujours traduit par « déterminé ».

situé dans le fini, de sorte qu'il est pleinement justifié de considérer que, dans ce cas, l'infini est situé en un point parfaitement déterminé.

Lorsque l'infini se présente sous cette forme déterminée, je l'appelle alors l'infini-authentique.

Ces deux types d'apparence sous lesquels l'infini mathématique s'est manifesté, ces deux formes sous lesquelles il a amené les plus grands progrès pour la géométrie, l'analyse et la physique mathématique, nous les distinguons bien pour la bonne compréhension de ce qui suit.

Sous la première forme, en tant qu'infini-inauthentique, il se présente comme un fini variable ; sous l'autre forme, que j'appelle l'infini-authentique, il se manifeste comme un infini tout à fait déterminé. Les nombres entiers infinis actuels que je vais définir par la suite et vers lesquels j'ai déjà été mené depuis une longue série d'années sans avoir clairement pris conscience que j'avais là des nombres concrets ayant une portée actuelle*, n'ont vraiment rien de commun avec la première de ces deux formes, l'infini-inauthentique, mais ils possèdent le même caractère de détermination que celui que nous rencontrons avec le point éloigné à l'infini de la théorie analytique des fonctions ; ils font donc partie des formes et des Affections[↔1] de l'infini-authentique. Mais tandis que le point situé à l'infini du plan numérique complexe est isolé par rapport à tous les points situés dans le fini, nous n'obtenons pas seulement un unique nombre entier infini, mais une suite infinie de tels nombres, bien distincts les uns des autres, et qui entretiennent entre eux aussi bien qu'avec les nombres entiers finis des relations légales de la théorie des nombres. Ces relations ne sont pas telles qu'elles peuvent en principe se ramener aux relations fondamentales des nombres finis entre eux ; ces dernières apparaissent souvent, mais seulement pour les différentes magnitudes et formes de l'infini-inauthentique, par exemple pour les fonctions devenant infiniment petites ou infiniment grandes d'une variable x, lorsqu'elles ont des index finis déterminés en devenant infinies. De telles relations ne peuvent en effet être considérées que comme relevant de situations déguisées du fini ou comme directement réductibles à ce dernier ; en revanche, les lois[↔2], restant à définir, auxquelles obéissent les nombres entiers infinis-authentiques sont fondamentalement différentes des corrélations prévalant dans le fini, ce qui n'exclut pas que les nombres réels finis puissent eux-mêmes connaître certaines déterminations nouvelles avec les nombres infinis-déterminés.

Les *deux principes générateurs* à l'aide desquels, comme nous le verrons, les nouveaux nombres infinis déterminés sont définis, sont d'une espèce telle que, par leur

---

* Je les ai appelés jusqu'ici « symboles de l'infinitude définie déterminée » [bestimmt definirte Unendlichkeitssymbole] cf. Math. Annalen Vol. XVII, p. 357 ; Vol. XX, p. 113 ; Vol. XXI, p. 54.

[↔1] Nous conservons le mot Affectionen, probablement utilisé par Cantor dans le sens spinozien.

[↔2] Le mot « loi » (« Gesetz ») et l'adjectif « légal » (« gesetzmässig ») sont souvent utilisés ici doivent être compris comme désignant l'aspect effectivement « réglementaire » des mathématiques, dans le sens d'une réglementation (linguistique) des concepts et de leurs relations entre eux.

action combinée, il n'existe plus aucune barrière à la conceptualisation des nombres entiers actuels ; Mais heureusement, comme nous le verrons, un *troisième* principe, que j'appelle le principe de *blocage* ou de *restriction*, impose au contraire certaines barrières successives au processus véritablement sans fin de création, de sorte que nous obtenons des sections naturelles dans la suite absolument infinie des nombres entiers actuels, sections que j'appelle des *classes de nombres*.

La *première* classe de nombres (I) est l'ensemble des nombres entiers finis $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$, suivie par la *deuxième* classe de nombres (II), composée de certains nombres entiers infinis qui se suivent selon une succession déterminée ; ce n'est qu'après avoir défini la deuxième classe de nombres que l'on passe à la troisième, puis à la quatrième, etc.

L'introduction des nouveaux nombres entiers me semble de la plus grande importance en premier lieu pour le développement et le renforcement du concept de puissance [Mächtigkeit][↔1] introduit dans mes travaux (J. de Borchardt Vol. 77, p. 257 ; Vol. 84, p. 242) et utilisé à de nombreuses reprises dans les précédents chapitres de cet essai. D'après lui, chaque ensemble bien défini a une puissance déterminée, deux ensembles étant considérés comme ayant la même puissance s'ils peuvent mutuellement et univoquement correspondre l'un à l'autre, élément par élément.

Dans le cas d'ensembles finis, la puissance coïncide avec la *quantité* [Anzahl][↔2] d'éléments, car on sait que de tels ensembles ont la même quantité d'éléments pour tout ordonnancement.

En revanche, en ce qui concerne les ensembles infinis, il n'a jamais été question jusqu'ici, ni dans mes travaux ni ailleurs, d'une *quantité* d'éléments définie de manière précise, mais on a pu leur attribuer une *puissance* déterminée, totalement indépendante de leur ordonnancement.

La plus petite puissance des ensembles infinis devait être attribuée, comme il était facile de le justifier, aux ensembles pouvant mutuellement et univoquement correspondre à la première classe de nombres et qui ont donc la même puissance qu'elle. En revanche, il manquait jusqu'à présent une définition tout aussi simple et naturelle des puissances supérieures.

[↔1] « Mächtigkeit » est toujours traduit ici par « puissance ». Les traducteurs préfèrent souvent le terme de « cardinalité », voire de « nombre cardinal », qui est le terme mathématique qui sera associé, dans la théorie des ensembles, à cette notion de « puissance », d' « épaisseur » ou en quelque sorte de « densité » d'un ensemble ou d'une multiplicité. Nous préférons conserver ici la connotation intuitive « pré-mathématique » du mot « Mächtigkeit ».

[↔2] De même, « Anzahl » est toujours traduit par « quantité ». Nous conservons ainsi la notion numérique de « Anzahl », ainsi que l'idée que la « quantité » provient d'un décompte. Les traducteurs préfèrent souvent le terme mathématique de « nombre ordinal » (ou parfois de « numéral »), qui sera stabilisé ultérieurement dans le cadre de la théorie des ensembles. On lira donc en particulier dans cette traduction des expressions comme « quantité d'un ensemble » plutôt que « quantité des éléments d'en ensemble ».

Nos classes de nombres mentionnées plus haut des nombres entiers actuels infinis-déterminés se présentent maintenant comme les Représentants↔[1] naturels, sous une forme cohérente, des puissances croissant selon une suite légale d'ensembles bien définis. Je démontre de la manière la plus certaine que la puissance de la deuxième classe de nombres (II) est non seulement différente de la puissance de la première classe de nombres, mais qu'elle est aussi, de fait, la puissance immédiatement supérieure ; Nous pouvons donc l'appeler la deuxième puissance ou la puissance de la deuxième classe. De même, la troisième classe de nombres donne la définition de la troisième puissance ou puissance de la troisième classe, etc. etc.

§ 2.

Un autre grand bénéfice des nouveaux nombres réside pour moi dans un *nouveau* concept qui n'est encore jamais apparu : le concept de la *quantité* d'éléments d'une multiplicité infinie *bien ordonnée* ; puisque ce concept est toujours exprimé par un nombre entièrement déterminé de notre domaine numérique étendu, pour autant que l'ordre des éléments de l'ensemble, qui sera défini plus en détail plus loin, est déterminé, et puisque, d'autre part, le concept de quantité reçoit dans notre vision intérieure une Représentation immédiate par le lien entre quantité et nombre, la Réalité de ce dernier, que j'ai soulignée, est établie même dans les cas où il est infini-déterminé.

Par ensemble *bien ordonné*, on entend tout ensemble bien défini dans lequel les éléments sont reliés entre eux par une succession déterminée au préalable d'après laquelle il existe un *premier* élément de l'ensemble, et tout élément particulier (s'il n'est pas le dernier dans la succession) est suivi par un autre déterminé, de même qu'à tout ensemble fini ou infini d'éléments appartient un élément déterminé qui est l'élément qui les suit tous *immédiatement* dans la succession (à moins qu'il n'en n'existe aucun qui les suive tous dans la succession). Deux ensembles « bien ordonnés » sont dits de la même *quantité* (par rapport aux successions qui leur sont imposées) lorsqu'une correspondance mutuelle et univoque est possible entre eux, de telle sorte que, si E et F sont deux éléments quelconques de l'un, E_1 et F_1 les éléments correspondants de l'autre, la position de E et F dans la succession du premier ensemble est toujours en accord avec la position de E_1 et F_1 dans la succession du second ensemble, de sorte que si E précède F dans la succession du premier ensemble, alors E_1 précède F_1 dans la succession du second ensemble. Cette correspondance, si tant est qu'elle soit possible, est, comme on le voit aisément, toujours tout à fait déterminée, et comme il se trouve toujours un et un seul nombre α dans la série numérique étendue tel que les nombres qui le *précèdent* (à partir de 1) ont la même quantité [que ces deux ensembles] dans la succession naturelle, on est obligé de poser que la quantité de ces deux ensembles « bien ordonnés » est précisément égale à α lorsque α est un nombre infiniment grand,

↔[1] Les mots commençant par une majuscule ont en général la même racine qu'en français. « Repräsentation », « Realität », etc.

et égale au nombre $\alpha - 1$ qui précède immédiatement le nombre α, si α est un nombre entier fini.

La différence essentielle entre les ensembles finis et les ensembles infinis est qu'un ensemble fini a la même quantité d'éléments pour chaque succession que l'on peut donner à ses éléments ; en revanche, un ensemble composé d'une infinité d'éléments se verra généralement attribuer des quantités différentes selon la succession que l'on donne à ses éléments. La *puissance* d'un ensemble est, comme nous l'avons vu, un attribut indépendant de son ordonnancement ; mais la *quantité* d'en ensemble se révèle être un facteur dépendant en général d'une succession donnée d'éléments, dès que l'on a affaire à des ensembles infinis. Cependant, même dans le cas des ensembles infinis, il existe un certain lien entre la *puissance* de l'ensemble et la *quantité* d'éléments déterminée pour une succession donnée.

Si nous prenons d'abord un ensemble ayant la puissance de la première classe et que nous donnons à ses éléments une succession *quelconque* déterminée de sorte qu'il forme un ensemble « bien ordonné », alors sa quantité est toujours un nombre déterminé de la *deuxième* classe de nombres et ne peut jamais être déterminée par un nombre d'une autre classe de nombres que la deuxième. D'autre part, tout ensemble de la première puissance peut être ordonné selon une succession telle que sa quantité, par rapport à cette succession, devienne égale à un nombre arbitrairement désigné de la deuxième classe de nombres. Nous pouvons aussi exprimer ces règles[↔2] de la manière suivante : tout ensemble d'une puissance de la *première* classe est *dénombrable au moyen des* nombres de la *deuxième* classe de nombres et seulement *au moyen de* ceux-ci, et l'on peut toujours donner à cet ensemble une succession de ses éléments telle qu'il soit dénombré dans cette succession par un nombre arbitrairement donné de la deuxième classe de nombres, lequel nombre indique la quantité des éléments de l'ensemble par rapport à cette succession.

Les mêmes lois s'appliquent aux ensembles de puissance supérieure. Ainsi, tout ensemble bien défini d'une puissance de la *deuxième* classe est dénombrable *au moyen de* nombres de la *troisième* classe de nombres et seulement par de tels nombres, et l'on peut toujours donner à l'ensemble une succession de ses éléments telle qu'il soit dénombré[*] dans cette succession par un nombre *arbitrairement donné* de la *troisième* classe de nombres, lequel nombre détermine la quantité d'éléments de l'ensemble par rapport à cette succession.

[↔2] « Satz » est toujours traduit par « règle », jamais par « théorème ».

[*] Ce que j'ai appelé jusqu'ici « dénombrable » dans les chapitres précédant cet essai n'est rien d'autre, d'après la définition maintenant introduite, à la fois renforcée et généralisée, que la dénombrabilité *au moyen des* nombres de la première classe (ensembles finis) ou *au moyen des* nombres de la seconde classe (ensembles de la première puissance).

§ 3.

Le concept *d'ensemble bien ordonné* est essentiel pour toute la théorie des multiplicités. Qu'il soit toujours possible d'amener tout ensemble *bien défini* sous la *forme* d'un ensemble *bien ordonné*, je reviendrai dans une étude ultérieure sur cette loi de la pensée, fondamentale, riche de conséquences et, me semble-t-il, particulièrement remarquable par sa validité générale. Je me restreindrai ici à démontrer comment, à partir du concept d'ensemble *bien ordonné*, les opérations fondamentales pour les nombres entiers, qu'ils soient finis ou infinis-déterminés, se dégagent de la manière la plus simple, et comment les lois de ces nombres se déduisent avec une certitude apodictique de la vision intérieure immédiate. Si l'on se donne d'abord deux ensembles *bien ordonnés* M et M_1, auxquels sont associés les nombres α et β correspondant à leurs quantités, alors $M + M_1$ est à son tour l'ensemble *bien ordonné* qui apparaît lorsque se présentent d'abord l'ensemble M puis l'ensemble M_1 que l'on joint à lui ; un nombre déterminé est alors également associé à l'ensemble $M + M_1$, relativement à la succession résultante de ses éléments, et correspondant à sa quantité ; ce nombre est appelé la somme de α et β et est désigné par $\alpha + \beta$; il apparaît ici immédiatement que, à moins que α et β ne soient tous deux finis, $\alpha + \beta$ est en général différent de $\beta + \alpha$. La loi de *commutativité* cesse donc d'être valable en général dès l'addition. Il est ensuite si aisé de former le concept de la somme d'une suite déterminée de plusieurs termes, cette suite pouvant être elle-même infinie-déterminée, que je n'ai pas besoin de m'y attarder ici, et je note donc seulement que la loi d'*associativité* se révèle généralement valable. On a en particulier : $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

Si l'on considère une succession, déterminée au moyen d'un nombre β, d'ensembles semblables et semblablement ordonnés, qui ont chacun la même quantité α d'éléments, on obtient un nouvel ensemble *bien ordonné*, dont la quantité associée définit le produit $\beta\alpha$, où β est le multiplicateur et α le multiplicande ; il se trouve également que $\beta\alpha$ est en général différent de $\alpha\beta$, et donc que la loi de commutativité n'est en général pas valable non plus pour la multiplication des nombres. En revanche, la loi d'associativité prévaut aussi généralement pour la multiplication, de sorte que l'on a : $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

Parmi les nouveaux nombres, certains se distinguent des autres par le fait qu'ils ont la propriété de nombre premier, mais cette dernière doit être caractérisée ici d'une manière un peu plus précise, en ce sens qu'on entend par nombre premier un nombre α tel que la décomposition $\alpha = \beta\gamma$, où β est le multiplicateur, n'est possible que si $\beta = 1$ ou $\beta = \alpha$; mais en général, même pour les nombres premiers α, le multiplicande aura une certaine marge d'incertitude ce qui, de par la nature des choses, ne peut pas être autrement. Néanmoins, il sera montré dans une étude ultérieure que la décomposition d'un nombre en ses facteurs premiers peut toujours se faire d'une manière unique et déterminée, même en ce qui concerne la suite des facteurs (pour autant que ceux-ci ne soient pas des nombres premiers finis adjacents dans le produit[M]). Dans ce cadre, deux espèces de nombres premiers infinis-déterminés apparaissent, dont la première est plus proche des nombres premiers finis, alors que les nombres premiers de la seconde espèce ont un caractère entièrement différent.

En outre, il me sera bientôt possible, grâce aux nouvelles connaissances acquises, de proposer une justification rigoureuse de la règle concernant les multiplicités dites linéaires infinies énoncée à la fin de l'étude « *Ein Beitrag zur Mannichfaltigkeitslehre* »[↔1] (J. de Borchardt Vol. 84, p. 257).

Dans le dernier chapitre (4) du présent essai (Vol. XXI, p. 54), j'ai établi, pour des ensembles-de-points P inclus dans un domaine continu à n dimensions, une règle qui, en utilisant la nouvelle terminologie définie ci-dessus, peut s'énoncer comme suit : « Si P est un ensemble-de-points dont la dérivée $P^{(\alpha)}$ s'évanouit identiquement, où α est un nombre entier quelconque de la *première* ou de la *deuxième* classe de nombres, alors la dérivée première $P^{(1)}$, et donc P lui-même, est un ensemble-de-points ayant la puissance de la *première* classe. » Il me semble tout à fait remarquable que cette règle puisse être inversée comme suit : « Si P est un ensemble-de-points dont la dérivée première $P^{(1)}$ a la puissance de la *première* classe, il existe des nombres entiers α appartenant à la *première* ou à la *deuxième* classe de nombres pour lesquels $P^{(\alpha)}$ s'évanouit identiquement, et parmi les nombres α pour lesquels ce phénomène se produit, il en existe un plus petit. »

Pour faire suite à une aimable invitation de mon très honorable ami, le professeur Mittag-Leffler de Stockholm, je publierai prochainement la preuve de cette règle dans le premier volume du nouveau journal mathématique qu'il édite. M. Mittag-Leffler publiera ensuite un essai dans lequel il montrera comment, sur la base de cette règle, une généralisation importante peut être donnée à ses recherches et à celles du professeur Weierstrass sur l'existence de fonctions analytiques univoques avec des lieux de singularité donnés.

§ 4.

Si besoin, la série numérique étendue des entiers peut être aisément complétée en un ensemble de nombres continu, en ajoutant à chaque nombre entier α tous les nombres réels x qui sont plus grands que zéro et plus petits que un.

Puisqu'on obtient de cette manière une extension déterminée du domaine numérique réel à l'infiniment grand, on peut se demander si on ne peut pas définir aussi avec le même succès des nombres infiniment petits déterminés ou, ce qui reviendrait au même, des nombres finis qui ne coïncident pas avec les nombres rationnels et irrationnels (qui apparaissent comme des valeurs limites de séries de

---

[M] Puisque la multiplication est commutative pour les nombres finis.
[↔1] « *Une contribution à la théorie des multiplicités* »

nombres rationnels) mais qui s'inséreraient dans des positions intermédiaires présumées au milieu des nombres réels, de la même manière que les nombres irrationnels s'insèrent dans l'enchaînement des nombres rationnels ou les nombres transcendants dans le tissu des nombres algébriques ?

La question de l'établissement de telles interpolations, à laquelle quelques auteurs ont consacré beaucoup d'efforts, ne peut, à mon avis, et comme je vais le montrer, recevoir une réponse claire et nette qu'à l'aide de nos nouveaux nombres, et notamment sur la base du concept général de quantité pour les ensembles bien ordonnés ; alors que les tentatives précédentes reposent, il me semble, autant sur une confusion impropre entre l'infini-inauthentique et l'infini-authentique que sur une base tout à fait incertaine et instable.

L'infini-inauthentique a souvent été qualifié de « mauvais » infini par les philosophes modernes, à tort à mon avis, car il s'est révélé, pour les mathématiques et les sciences naturelles, un instrument hautement utile. A ma connaissance, les grandeurs infiniment petites n'ont jusqu'à présent été forgées que pour être utilisés sous la forme l'infini-inauthentique et sont, en tant que telles, aptes à toutes les variations, Modifications et relations utilisées et exprimées dans l'analyse infinitésimale aussi bien que dans la théorie des fonctions pour établir une profusion de vérités analytiques. En revanche, toutes les tentatives pour forcer cet infiniment petit en un infiniment petit authentique sont vaines et devraient finalement être abandonnées. Si d'autres grandeurs infiniment petites authentiques existent, c'est-à-dire qu'elles sont définissables, elles n'ont assurément aucun lien direct avec les grandeurs ordinaires qui *deviennent* infiniment petites.

Par contraste avec les tentatives mentionnées sur l'infiniment petit et avec la confusion entre les deux formes de manifestation de l'infini, on observe souvent ce point de vue sur la nature et sur le sens des grandeurs numériques selon lequel il n'existe véritablement pas d'autres nombres que les nombres entiers actuels finis de notre classe de nombres (I).

Tout au plus accorde-t-on une certaine Réalité aux nombres rationnels qui en découlent directement. Mais en ce qui concerne les irrationnels, ils ne doivent avoir qu'une signification formelle dans les mathématiques pures, en ce sens qu'ils ne servent en quelque sorte que de figures de calcul pour fixer les propriétés de groupes de nombres entiers et les décrire d'une manière simple et uniforme. Selon ce point de vue, le matériel authentique de l'analyse est constitué exclusivement de nombres entiers finis actuels et toutes les vérités établies ou encore en attente de découverte en arithmétique et en analyse doivent être comprises comme des relations entre les nombres entiers finis ; l'analyse infinitésimale, entraînant avec elle la théorie des fonctions, n'est considérée comme légalisée que dans la mesure où ses règles peuvent être interprétées de manière démontrable comme des lois régissant des nombres entiers finis. Cette conception des mathématiques pures, bien que je ne sois pas d'accord avec elle, présente incontestablement certains avantages que je voudrais souligner ici ; le fait qu'elle compte parmi ses ambassadeurs une partie des mathématiciens les plus méritants de notre époque témoigne également de son importance.

Si, comme on le suppose ici, seuls les nombres entiers finis existent véritablement, et que tous les autres ne sont rien d'autre que des formes relationnelles, on peut exiger que les preuves des règles analytiques soient examinées à l'aune de leur « contenu numérique théorique », et que l'on comble toute lacune qu'elles présenteraient en respectant les préceptes de l'arithmétique ; La véritable pierre de touche de l'authenticité et de la rigueur achevée des preuves réside dans la possibilité d'un tel comblement. Il est indéniable que par ce moyen, la justification de nombreuses règles peut être renforcée et que d'autres améliorations méthodologiques peuvent être apportées dans différentes parties de l'analyse ; et l'on voit dans le respect des préceptes qui découlent de cette vision une garantie contre toute espèce d'incohérences ou d'erreurs.

De cette manière, un principe déterminé, bien qu'assez sobre et évident, est établi et recommandé à tous comme ligne directrice ; il doit servir à indiquer les vraies limites de l'envol spéculatif et conceptuel des mathématiques, là où il ne risque pas de mener vers l'abîme du « transcendant », là où, comme on le dit avec crainte et dans un effroi salutaire, « tout est possible ». Ceci étant dit, qui sait si ce n'est pas surtout le point de vue de l'utilité qui a déterminé les promoteurs de cette position à la recommander comme un régulateur efficace de la progression des forces, si facilement menacées par l'orgueil et l'intempérance, afin de les protéger contre toutes les erreurs, bien qu'on ne puisse y trouver aucun principe fécond ; en effet, l'hypothèse qu'ils seraient partis de ces bases, même en découvrant de nouvelles vérités, est pour moi exclue, parce que, quels que soient les bons côtés que j'attribue à ces préceptes, je dois les considérer à strictement parler comme erronés ; nous ne leur devons aucun progrès réel et s'ils avaient été suivis à la lettre, la science aurait été freinée ou confinée dans les limites les plus étroites. Heureusement, tout ne va pas si mal en vérité car ni la recommandation ni le respect de ces préceptes, utiles dans certaines circonstances et conditions, n'ont jamais été entièrement observés ; et il est frappant de constater que jusqu'à présent, à ma connaissance, personne n'a tenté les exprimer mieux et plus complètement que je ne l'ai tenté ici.

Si nous observons l'histoire, nous constatons que des points de vue similaires ont été parfois défendus et qu'ils apparaissent déjà chez Aristote. Comme on le sait, au Moyen Âge, tous les scolastiques ont présenté « infinitum actu non datur » comme une règle irréfutable empruntée à Aristote. Mais si l'on considère les raisons qu'avance Aristote[2)] contre l'existence de l'infini actuel (voir par exemple dans sa « Métaphysique », Livre XI, chap. 10), on peut essentiellement les rapporter à une condition préalable qui repose sur une *petitio principii*, à savoir qu'il n'y a que des nombres finis, ce qu'il déduit du fait qu'il ne connaissait que des dénombrements d'ensembles finis. Mais il me semble avoir prouvé plus haut, et cela apparaîtra encore plus clairement dans la suite de ce travail, que des dénombrements aussi déterminés que ceux des ensembles finis peuvent aussi être réalisés sur des ensembles infinis, à condition que l'on munisse ces ensembles d'une loi déterminée suivant laquelle ils deviennent des ensembles *bien ordonnés*. Le fait que sans une telle succession légale des éléments d'un ensemble, aucun dénombrement de celui-ci ne puisse être réalisé, ceci est dans la nature-même du concept de *dénombrement* ; même dans le cas d'ensembles finis, un dénombrement ne peut être effectué que selon une séquence déterminée des éléments comptés, mais il apparaît ici comme un caractère particulier des ensembles finis que le résultat du dénombrement – la *quantité* – est indépendant de tout ordonnancement particulier ; alors que pour les ensembles infinis, comme nous l'avons vu, une telle indépendance ne s'observe généralement pas, et la quantité d'un ensemble infini est un nombre entier infini *co-déterminé* par la loi associée au dénombrement ; c'est précisément là et là seulement que réside la différence essentielle entre le fini et l'infini, différence qui trouve son origine dans la nature elle-même et qui ne pourra donc jamais être effacée ; Mais jamais, à cause de cette différence, on ne pourra nier l'existence de l'infini tandis qu'on maintiendra celle du fini ; si l'on fait tomber l'une, il faut aussi se défaire de l'autre ; mais où cela nous mènerait-il ?

Un autre argument utilisé par Aristote contre la réalité de l'infini consiste à affirmer que le fini serait anéanti et détruit par l'infini, si celui-ci existait, car le nombre fini serait prétendument annulé par un nombre infini ; comme on le verra clairement par la suite, la vérité est qu'à un nombre infini, envisagé comme déterminé et achevé, on peut *très bien* ajouter un nombre fini et l'unir à lui sans que cela entraîne une annulation de ce dernier (le nombre infini est plutôt modifié lorsqu'on lui ajoute un nombre fini) ; seule l'opération inverse, l'ajout d'un nombre infini à un nombre fini placé en premier entraîne l'annulation de ce dernier sans qu'il y ait Modification du premier. Ce juste état de choses concernant le fini et l'infini, qui a été complètement méconnu par Aristote, devrait conduire à de nouvelles propositions non seulement en analyse, mais aussi dans les autres sciences, notamment dans les sciences naturelles.

L'idée d'envisager en même temps l'infiniment grand sous la forme de ce qui croît sans limite et sous la forme connexe des séries infinies convergentes introduites pour la première fois au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, mais aussi de le fixer mathématiquement au moyen des nombres sous la forme déterminée de l'infini achevé, j'y ai été conduit presque malgré moi tant elle est contraire aux traditions qui me sont chères, mais puisqu'elle suit de nombreuses années d'efforts et de tentatives scientifiques, je ne crois pas que l'on puisse faire valoir contre elle des raisons auxquelles je ne saurais m'opposer.

§ 5.

Lorsque j'évoque les traditions, je ne les entends pas seulement au sens étroit de l'expérience mais aussi en tant qu'elles proviennent des fondateurs de la philosophie et des sciences naturelles modernes. Pour juger de la question dont il s'agit ici, je ne citerai que quelques-unes des sources les plus importantes. Se référer à :

Locke, *Essai sur l'entendement humain* Livre II, chap. XVI et XVII.

Descartes, Correspondance et commentaires au sujet de ses *Méditations* ; *Principia* I, 26.

Spinoza, Lettre XXIX ; *Cogitata Metaphysica* Parties I et II.

Leibniz, édition de Erdmann p. 138, 244, 436, 744 ; édition de Pertz, II, 1 p. 209 ; III, 4 p. 218 ; III, 5 p. 307, 322, 389 ; III, 7 p. 273[*]).

On ne peut pas trouver, encore aujourd'hui, d'arguments plus forts que ceux réunis ici contre l'introduction de nombres entiers infinis ; qu'on les examine donc et qu'on les compare avec ceux que je propose en leur faveur. Je réserve pour une autre occasion une discussion détaillée et approfondie de ces passages, notamment la très importante et très substantielle correspondance entre Spinoza et L. Meyer, et je me restreindrai ici à ce qui suit. Si différentes que soient les théories de ces auteurs, ils s'accordent essentiellement, dans ces passages, sur l'appréciation du fini et de l'infini, à savoir que le concept de nombre implique sa finitude et que d'autre part le véritable infini ou Absolu, qui est en Dieu, ne doit faire l'objet d'aucune Détermination. Je suis entièrement d'accord avec ce dernier point, puisqu'il ne peut pas en être autrement et que la règle « omnis determinatio est negatio » ne peut, selon moi, absolument pas être mise en question ; ; en revanche, je vois dans le premier, comme je l'ai déjà dit plus haut en examinant les arguments d'Aristote contre l' « infinitum actu », une petitio principii qui explique certaines contradictions que l'on trouve chez tous ces auteurs et notamment aussi chez Spinoza et Leibniz. L'hypothèse selon laquelle en dehors de l'Absolu, qui ne peut être atteint par aucune Détermination, et du fini, il ne devrait exister aucune Modification qui, bien que non finie, soit néanmoins déterminable par des nombres, ce que j'appelle donc l'infini-authentique – je ne vois rien qui justifie cette hypothèse qui est même, à mon avis, en contradiction avec certaines règles établies par ces deux derniers philosophes. Ce que j'affirme et que je crois avoir prouvé par ce travail, ainsi que par mes recherches antérieures, c'est qu'il y a, après le fini, un *Transfinitum* (qu'on pourrait aussi appeler *Suprafinitum*), c'est-à-dire une échelle illimitée de Modes déterminés qui, par leur nature, ne sont pas finis, mais infinis, mais qui, comme le fini, peuvent être déterminés par des nombres spécifiques, bien définis et distincts les uns des autres. J'ai donc la conviction que le domaine des grandeurs définissables n'est pas achevé avec les grandeurs finies et que les limites de notre connaissance peuvent être continuer à s'étendre sans qu'il soit nécessaire de forcer notre nature de quelque manière. Au lieu de la règle aristotélico-scolastique discutée au § 4, je propose donc celle-ci :

[*] A noter également : Hobbes, *de corpore* chap. VII, 11. Berkeley, *Treatise on the princ. of hum. Knowledge*, CXXVIII-CXXXII.

Omnia seu finita seu infinita *definita* sunt et excepto Deo ab intellectu determinari possunt↔.[3)]

On invoque souvent la finitude de l'intellect [Verstand] humain comme raison pour laquelle seuls des nombres finis sont concevables ; mais je vois à nouveau dans cette affirmation le raisonnement circulaire évoqué. En effet, on entend implicitement par « finitude de l'intellect » que sa capacité à former des nombres est restreinte à des nombres finis. Mais s'il s'avère que l'intellect peut aussi, dans un sens déterminé, définir et distinguer des nombres infinis, c'est-à-dire *au-delà du fini*, alors il faut donner aux mots « intellect fini » une signification élargie, si bien qu'on ne peut plus en tirer cette conclusion ; ou bien il faut aussi accorder par certains aspects à l'intellect humain le prédicat « infini », ce qui, à mon avis, est la seule chose à faire. L'expression « intellect fini », que l'on entend si souvent, n'est, je crois, exacte d'aucune manière ; Aussi restreinte que soit la nature humaine en vérité, il y a beaucoup d'infini en elle, et je pense même que si elle n'était pas elle-même infinie à bien des égards, la ferme confiance et la certitude de l'existence de l'Absolu, sur lesquelles nous sommes tous d'accord, ne s'expliqueraient pas. En particulier, je défends particulièrement le point de vue selon lequel l'intellect humain a une disposition illimitée pour la formation graduelle de classes de nombres entiers qui sont dans une relation déterminée avec les Modes infinis et dont les *puissances* sont d'intensité croissante.

Les principales difficultés des systèmes des deux derniers penseurs cités, certes extérieurement différents mais intérieurement tout à fait apparentés, peuvent, il me semble, trouver un remède par la voie que j'ai choisie, et certaines d'entre elles peuvent même être déjà résolues et élucidées de manière satisfaisante. Ce sont là des difficultés qui ont contribué à l'émergence du Criticisme ultérieur, lequel, malgré tous ses avantages, ne me paraît pas pouvoir fournir un substitut adéquat au développement entravé des doctrines de Spinoza et de Leibniz. Car à côté ou au lieu de l'explication mécanique de la nature, qui dispose dans son domaine de tous les moyens et de tous les avantages de l'analyse mathématique, mais dont Kant a si bien montré la partialité et l'insuffisance, une explication *organique* de la nature, dotée de la même rigueur mathématique et dépassant celle-ci, n'a même pas été amorcée ; je pense qu'elle ne peut voir le jour que par la reprise et le perfectionnement de leurs travaux et de leurs efforts.

Un point particulièrement délicat dans le système de Spinoza concerne le rapport entre le Mode fini et les Modes infinis ; là reste non élucidé pourquoi et dans quelles circonstances le fini peut assurer son autonomie par rapport à l'infini, ou l'infini par rapport à l'infini encore plus considérable. L'exemple déjà évoqué au § 4 me semble indiquer, par son symbolisme simple, le chemin par lequel il est peut-être possible de rapprocher de la solution à ce problème. Si ω est le premier nombre de la deuxième

↔ Toutes choses sont soit finies, soit infinies *définies* et, Dieu mis à part, elles peuvent être déterminées par l'intellect.

classe de nombres, on a : $1 + \omega = \omega$, en revanche $\omega + 1 = (\omega + 1)$, où $(\omega + 1)$ est un nombre tout à fait différent de ω. Tout dépend donc, comme on le voit ici clairement, de la *position* du fini par rapport à l'infini ; si le premier se présente, il se fond dans l'infini et y disparaît, mais s'il prend place *modestement derrière* l'infini, il subsiste et s'unit à lui pour former un infini nouveau, car modifié.

§ 6.

S'il existe des difficultés pour concevoir des nombres entiers *infiniment grands*, *achevés*, comparables entre eux et avec les nombres finis, liés entre eux et avec les nombres finis au moyen de lois fixes, ces difficultés seront liées à la perception que les nouveaux nombres, s'ils ont à bien des égards le caractère des précédents, ont sous beaucoup d'autres aspects une nature tout à fait singulière, qui fait même souvent qu'on trouve réunis dans un seul et même nombre différentes caractéristiques qui ne se rencontrent jamais en même temps dans les nombres finis, mais qui sont discordantes. On trouve déjà dans l'un des passages cités au § précédent l'idée qu'un nombre entier infini, s'il existait, devrait être un nombre à la fois pair et impair, et que puisque ces deux caractéristiques ne peuvent pas être réunies, un tel nombre n'existe pas.

Il semble que l'on suppose ici implicitement que les caractéristiques qui sont séparées pour les nombres habituels doivent aussi avoir ce rapport les unes par rapport aux autres pour les nouveaux nombres, et que l'on en conclut à l'impossibilité des nombres infinis. Qui n'est pas frappé par le paralogisme ? Toute généralisation ou extension de concepts n'est-elle pas liée à l'abandon de spécificités, voire impensable sans un tel abandon ? N'est-ce pas seulement récemment que l'on a eu l'idée, si importante pour le développement de l'analyse et conduisant aux plus grands progrès, d'introduire les grandeurs complexes sans voir d'obstacle dans le fait qu'elles ne peuvent être dites ni positives ni négatives ? Et ce n'est qu'un pas similaire que j'ose faire ici ; il sera peut-être même beaucoup plus facile à la conscience commune de me suivre qu'il n'a été possible de passer des nombres réels aux complexes ; car les nouveaux nombres entiers, même s'ils se distinguent des nombres habituels disposant d'une certitude substantielle plus intense, n'en ont pas moins, en tant que quantités, tout à fait la même Réalité que ces derniers, alors que des difficultés se sont opposées à l'introduction des grandeurs complexes jusqu'à ce que l'on ait trouvé, après bien des efforts, leur Représentation géométrique par des points ou par des segments dans un plan.

Pour revenir brièvement à cette réflexion sur la qualité d'être pair ou impair, considérons à nouveau le nombre ω, pour montrer avec lui comment ces caractéristiques incompatibles sur les nombres finis se trouvent ici réunies sans aucune contradiction. Dans le § 3, les définitions générales de l'addition et de la multiplication ont été établies et j'ai souligné que pour ces opérations, la loi de commutativité n'est généralement pas valable ; je vois là une différence essentielle entre les nombres infinis et finis. Notez de plus que dans un produit $\beta\alpha$, j'entends par β le multiplicateur, et par α le multiplicande. Il vient alors aisément pour ω les deux formes suivantes : $\omega = \omega \cdot 2$ et $\omega = 1 + \omega \cdot 2$. Selon elles, ω peut donc être considéré aussi bien comme un nombre pair que comme un nombre impair. Mais d'un autre côté, en prenant 2 comme multiplicateur, on pourrait aussi dire que ω est un nombre ni pair ni impair, car, comme on peut le prouver facilement, ω ne peut se représenter ni sous la forme $2 \cdot \alpha$, ni sous la forme $2 \cdot \alpha + 1$. Il est donc vrai que le nombre ω, par rapport aux nombres traditionnels, a une nature tout à fait singulière, puisque toutes ces caractéristiques et propriétés sont réunies en lui. Les autres nombres de la deuxième classe de nombres sont encore bien plus singulières, comme je le montrerai plus tard.

§ 7.

J'ai cité au § 5 de nombreux passages des œuvres de Leibniz dans lesquels il se prononce contre les nombres infinis, en y disant notamment « Il n'y a point de nombre infini ni de ligne ou autre quantité infinie, si on les prend pour des Touts véritables… L'infini véritable n'est pas une modification, c'est l'absolu ; au contraire, dès qu'on modifie on se borne ou forme un fini » (je suis d'accord avec lui dans ce dernier passage en ce qui concerne la première affirmation, mais pas en ce qui concerne la seconde) ; mais je suis par ailleurs, fort heureusement, en mesure de pouvoir prouver certaines déclarations du même penseur dans lesquelles il se prononce, en quelque sorte en contradiction avec lui-même, pour l'infini-authentique (différent de l'Absolu) de la manière la plus indubitable. Ainsi affirme-t-il p.118 de l'édition de Erdmann :

« Je suis tellement pour l'infini actuel, qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer les perfections de son Auteur. Ainsi je crois qu'il n'y a aucune partie de la matière qui ne soit, je ne dis pas divisible, mais actuellement divisée ; et par conséquent la moindre particelle doit être considérée comme un monde plein d'une infinité de créatures différentes. »

Mais l'infini-authentique, tel qu'il se présente par exemple dans les ensembles-de-points bien définis ou dans la Constitution des corps à partir d'atomes ponctuels, (je ne parle pas ici des atomes chimico-physiques, démocritéens, car je ne peux les considérer comme existant ni en tant que concept ni dans la réalité, même si cette fiction permet de faire, dans une certaine limite, beaucoup de choses) a trouvé son défenseur le plus résolu avec le philosophe et mathématicien très perspicace de notre siècle, Bernhard Bolzano, qui a exposé ses vues à ce sujet, notamment dans le bel et riche ouvrage « *Paradoxien des Unendlichen*, Leipzig 1851 » dont le but est de démontrer comment les contradictions recherchées dans l'infini par les sceptiques et les péripatéticiens *de tous les temps* n'existent absolument pas, à condition de faire l'effort, certes pas toujours très facile, d'envisager sérieusement le contenu véritable du concept d'infinitude. On trouve ainsi dans cet ouvrage une discussion pertinente à bien des égards sur l'infini-inauthentique mathématique, tel qu'il se présente sous la forme de différentielles d'ordre premier et supérieur, ou dans les sommes de séries infinies ou dans d'autres processus-limites. Cet infini (appelé par certains scolastiques infini syncatégorématique) est un simple concept auxiliaire et relationnel de notre pensée, qui, selon sa définition, inclut la variabilité et dont, par conséquent, le « datur » ne peut jamais être affirmé dans le sens d'authentique.

Il est tout à fait remarquable qu'en ce qui concerne cette espèce d'infini, il ne règne aucune divergence d'opinion essentielle, même parmi les philosophes actuels, sans compter le fait que certaines écoles modernes de soi-disant Positivistes, Réalistes[4)] ou Matérialistes croient voir dans cet infini *syncatégorématique*, dont ils doivent eux-mêmes admettre qu'il n'a pas d'être authentique, le *concept suprême*.

Mais on trouve déjà chez Leibniz cet état correct des choses mentionné pour l'essentiel à de nombreuses reprises ; car c'est à cet infini-inauthentique que se réfère par exemple le passage suivant p.436 de l'édition de Erdmann :

« Ego philosophice loquendo non magis statuo magnitudines infinite parvas quam infinite magnas, seu non magis infinitesimas quam infinituplas. Utrasque enim per modum loquendi compendiosum pro mentis fictionibus habeo, ad calculum aptis, quales etiam sunt radices imaginariae in Algebra. Interim demonstravi, magnum has expressiones usum habere ad compendium cogitandi adeoque ad inventionem ; et in errorem ducere non posse, cum pro infinite parvo substituere sufficiat tam parvum quam quis volet, ut error sit minor dato, unde consequitur errorem dari non posse. »

Bolzano est peut-être le seul chez qui les nombres infinis-authentiques ont un certain droit, du moins il en est souvent question ; mais je ne suis pas du tout d'accord avec lui sur la façon dont il les traite sans pouvoir en donner une définition juste, et je considère par exemple les §§ 29-33 dudit livre comme sans fondement et erronés. Il manque à l'auteur le *concept général de puissance* ainsi que le *concept précis de quantité* pour une véritable conceptualisation des nombres infinis-déterminés. Bien que les deux apparaissent chez lui en germe dans certains passages sous la forme de particularités, il ne travaille pas, me semble-t-il, avec toute la clarté et la certitude voulues, ce qui explique de nombreuses incohérences et même certaines erreurs dans ce précieux ouvrage.

Sans les deux concepts mentionnés, je suis convaincu que l'on ne peut pas progresser dans la théorie des multiplicités, et je pense qu'il en va de même pour les domaines qui dépendent de la théorie des multiplicités ou qui ont le contact le plus étroit avec elle, comme par exemple la théorie moderne des fonctions d'une part, et la logique et la théorie de la connaissance d'autre part. Lorsque je m'empare de l'infini comme je l'ai fait ici et dans mes tentatives précédentes, j'éprouve une vraie satisfaction, à laquelle je m'abandonne avec gratitude, de voir comment le concept de nombre entier, qui dans le fini n'a que la *quantité* en arrière-plan, se divise en quelque sorte en deux concepts lorsque l'on s'élève vers l'infini, celui de *puissance*, qui est indépendant de l'ordre donné à un ensemble, et celui de *quantité*, qui est nécessairement lié à un ordre légal de l'ensemble, grâce auquel ce dernier devient un *ensemble bien ordonné*. Et si je redescends de l'infini au fini, je vois tout aussi clairement et magnifiquement comment les deux concepts deviennent à nouveau un et se *fondent* dans le concept du nombre entier fini.

§ 8.

Nous pouvons entendre de deux manières la réalité ou de l'existence des nombres entiers, tant finis qu'infinis ; mais à proprement parler, ce sont les deux mêmes relations selon lesquelles on peut généralement envisager la Réalité de n'importe quel concept et idée. D'une part, nous pouvons considérer les nombres entiers comme réels dans la mesure où, sur la base de définitions, ils occupent dans notre intellect une place tout à fait déterminée, sont distingués au mieux de tous les autres composantes de notre intellect, entretiennent avec elles dans des relations déterminées et modifient ainsi d'une manière déterminée la substance de notre esprit ; qu'il me soit permis d'appeler cette espèce de Réalité de nos nombres leur *Réalité intrasubjective* ou *immanente*.[5)] Mais on peut aussi attribuer une réalité aux nombres dans la mesure où ils doivent être considérés comme l'expression ou l'image d'événements et de relations dans le monde extérieur faisant face à l'intellect, et où les différentes classes de nombres (I), (II), (III), etc. sont les Représentants des puissances qui adviennent effectivement dans la nature physique et spirituelle. J'appelle cette deuxième espèce de Réalité la Réalité *transsubjective* ou encore *transcendante*[↔1] des nombres entiers.

Sur la base tout à fait réaliste, mais en même temps non moins idéaliste, de mes réflexions, il ne fait aucun doute pour moi que ces deux espèces de Réalité se rejoignent toujours, en ce sens qu'un concept que l'on peut qualifier d'existant sous le premier aspect possède toujours dans une certaine mesure, et même sous une infinité de rapports, une Réalité transcendante[6)], dont la constatation fait certes partie la plupart du temps des tâches les plus ardues et les plus délicates de la métaphysique, et doit souvent être laissée au temps où le développement naturel de l'une des autres sciences révèle la signification transcendante du concept en question.

Ce lien entre les deux Réalités trouve son fondement authentique dans l'*unité* du *Tout, dont nous-mêmes faisons partie*. – La mention de ce lien a ici pour objectif d'en déduire une conséquence qui me paraît très importante pour les mathématiques, à savoir que ces dernières, dans le façonnement de leur répertoire d'idées, doivent *uniquement* tenir compte de la Réalité *immanente* de leurs concepts et n'ont donc *aucune* obligation de les examiner également selon leur Réalité *transcendante*. En raison de cette remarquable position, qui les distingue de toutes les autres sciences et qui explique la façon relativement aisée et sans contrainte de s'y consacrer, elles méritent tout particulièrement le nom de *mathématiques libres*, une qualification à laquelle je donnerais, si j'en avais le choix, la préférence par rapport à celle devenue habituelle de mathématiques « pures ».

[↔1] « Transient » est traduit par « transcendant » comme dans les traductions françaises connues.

Les mathématiques sont entièrement libres dans leur développement et ne sont liées qu'à la considération évidente que leurs concepts sont à la fois non contradictoires en eux-mêmes et qu'ils entretiennent des relations fixées, ordonnées par des définitions, avec les concepts précédemment constitués, déjà disponibles et éprouvés.[7)] En particulier, lorsqu'elles introduisent de nouveaux nombres, elles sont seulement tenues d'en donner des définitions qui leur confèrent une certitude telle et, dans certaines circonstances, une relation telle avec les nombres antérieurs qu'ils puissent, si besoin, être distingués les uns des autres de manière déterminée. Dès qu'un nombre satisfait à toutes ces conditions, il peut et doit être considéré comme existant et actuel dans les mathématiques. Je vois ici la raison indiquée au § 4, pour laquelle on doit considérer les nombres rationnels, irrationnels et complexes comme tout à fait aussi existants que les nombres entiers positifs finis.

Il n'est pas nécessaire, je crois, de craindre dans ces préceptes, comme cela arrive souvent, un quelconque danger pour la science ; d'une part, les conditions indiquées dans lesquelles la liberté de former des nombres peut seulement s'exercer sont telles qu'elles ne laissent qu'une marge extrêmement réduite à l'arbitraire ; mais de plus chaque concept mathématique porte en lui le correctif nécessaire ; s'il est stérile ou inapproprié, il se manifeste très vite par son inutilité et il est alors abandonné, faute de succès. En revanche, toute limitation excessive de l'effort d'investigation mathématique me semble entraîner un danger bien plus grand, et d'autant plus grand qu'en vérité aucune justification ne peut être tirée de l'essence de la science ; car l'*essence* des *mathématiques* réside précisément dans leur *liberté*.

Si ce caractère des mathématiques ne s'était pas imposé à moi pour les raisons que je viens d'exposer, tout le développement de la science elle-même, tel que nous le percevons en notre siècle, m'aurait conduit exactement aux mêmes vues.

Si Gauss, Cauchy, Abel, Jacobi, Dirichlet, Weierstrass, Hermite et Riemann s'étaient engagés à toujours soumettre leurs nouvelles idées à un contrôle métaphysique, nous n'aurions sûrement pas à nous réjouir de la magnifique construction de la récente théorie des fonctions, qui, bien que conçue et élaborée de manière totalement libre et sans finalité transcendante[↔1], révèle néanmoins dès à présent, comme on pouvait s'y attendre, sa signification transcendante dans des applications à la mécanique, à l'astronomie et à la physique mathématique ; nous ne verrions pas le grand essor de la théorie des équations différentielles suscité par Fuchs, Poincaré et bien d'autres, si ces excellentes forces avaient été entravées et inhibées par des influences extérieures ; et si Kummer n'avait pas pris la liberté riche de conséquences d'introduire des nombres dits « idéaux » dans la théorie des nombres, nous ne serions pas en mesure aujourd'hui d'admirer les travaux algébriques et arithmétiques si importants et si remarquables de Kronecker et de Dedekind.

[↔1] « Transeunt » est également traduit par « « transcendant ».

Si les mathématiques ont donc le droit de se développer tout à fait librement de toute entrave métaphysique, je ne peux pas non plus accorder le même droit aux mathématiques « appliquées », comme par exemple la mécanique analytique et la physique mathématique ; ces disciplines sont selon moi *métaphysiques* dans leurs fondements comme dans leurs objectifs ; si elles cherchent à s'en affranchir, comme l'a récemment proposé un célèbre physicien[↔1], elles dégénèrent en une « description de la nature », à laquelle il manque nécessairement le souffle frais de la libre pensée mathématique, tout comme la puissance d'*explication* et d'*analyse* des phénomènes naturels.

§ 9.

Vu l'importance des nombres dits réels [reellen], rationnels et irrationnels dans la théorie des multiplicités, je ne voudrais pas manquer de rappeler ici le plus important au sujet de leurs définitions. Je ne m'attarderai pas sur l'introduction des nombres rationnels, car des présentations strictement arithmétiques de ces derniers ont souvent été élaborées ; parmi celles qui me sont plus familières, je relève celles de H. Grassmann (*Lehrbuch der Arithmetik*, Berlin 1861) et de J. H. T. Müller (*Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik*, Halle 1855). En revanche, je voudrais maintenant discuter plus précisément des trois formes principales que je connais, et qui sont sans doute pour l'essentiel les seules, de l'introduction strictement arithmétique des nombres réels généraux. Il s'agit *premièrement* du type d'introduction que le professeur Weierstrass utilise depuis de nombreuses années dans ses cours sur les fonctions analytiques et dont on peut trouver quelques mentions dans le traité de programme de Monsieur E. Kossak (*Die Elemente der Arithmetik*, Berlin 1872). *Deuxièmement*, Monsieur R. Dedekind a publié dans son ouvrage *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig 1872 une forme de définition singulière et *troisièmement*, j'ai moi-même proposé en 1871 (Math. Annalen Vol. V, p. 123) une forme de définition qui a extérieurement une certaine ressemblance avec celle de Weierstrass, de sorte que Monsieur H. Weber (*Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 27ème année, Historisch- literarische Abtheilung, p. 163) a pu les confondre ; Mais à mon avis, cette *troisième* forme de définition, développée plus tard par Monsieur Lipschitz (*Grundlagen der Analysis*, Bonn 1877), est la plus simple et la plus naturelle de toutes et présente l'avantage qu'elle s'adapte le plus directement au calcul analytique.

La définition d'un nombre réel irrationnel implique toujours un ensemble infini bien défini de première puissance de nombres rationnels ; C'est ce que toutes les formes de définition ont en commun, et leur différence réside dans le moment générateur par lequel l'ensemble est lié au nombre qu'il définit et dans les conditions

[↔1] Gustav Kirchhoff

que l'ensemble doit remplir pour convenir comme base pour la définition du nombre en question.

La *première* forme de définition[M] est basée sur un ensemble de nombres rationnels positifs a_ν, qui est noté (a_ν), et qui remplit la condition selon laquelle toute somme d'une quantité finie de a_ν, peu importe lesquels et combien, reste toujours en dessous d'une limite donnée. Si l'on a maintenant deux tels agrégats (a_ν) et $(a_\nu{}')$, on montre rigoureusement que trois cas peuvent se présenter ; soit chaque partie $\frac{1}{n}$ de l'unité est toujours contenue le même nombre de fois dans les deux agrégats, pourvu que l'on additionne une quantité finie, agrandissable et adéquate, de leurs éléments ; soit on atteint un certain n pour lequel $\frac{1}{n}$ est plus souvent inclus dans le premier agrégat que dans le second, soit, troisièmement, à partir d'un certain n, $\frac{1}{n}$ est toujours plus souvent inclus dans le second que dans le premier. À ces situations correspondent, si b et b' sont les nombres à définir par les deux agrégats (a_ν) et $(a_\nu{}')$, dans le premier cas $b = b'$, dans le deuxième $b > b'$, et dans le troisième $b < b'$. Si l'on réunit les deux agrégats en un nouveau $(a_\nu, a_\nu{}')$, celui-ci donne la base pour la définition de $b + b'$; et si l'on forme à partir des deux agrégats (a_ν) et $(a_\nu{}')$ le nouvel agrégat $(a_\nu \cdot a_\mu{}')$, dans lequel les éléments sont les produits de tous les a_ν avec tous les $a_\mu{}'$, ce nouvel agrégat est pris comme base de la définition du produit bb'.

On voit qu'ici le moment générateur qui lie l'ensemble au nombre à définir par lui réside dans la construction de la somme [des a_ν] ; mais il faut souligner comme *essentiel* que seule la sommation d'une quantité toujours finie d'éléments rationnels est utilisée et que, par exemple, le nombre b à définir *n'est pas* posé d'emblée comme la somme Σa, de la série infinie (a_ν) ; il y aurait là une *faute logique*, car la définition de la somme Σa n'est obtenue qu'en l'assimilant au nombre fini b, nécessairement déjà défini auparavant. Il me semble que cette erreur logique, évitée seulement par M. Weierstrass, a été presque généralement commise dans les temps passés et n'a pas été remarquée pour la raison qu'elle fait partie des rares cas où de véritables erreurs ne peuvent pas causer de dommages plus importants dans le calcul. – Néanmoins, j'ai la conviction que toutes les difficultés que l'on a rencontrées dans le concept d'irrationnel sont liées à cette erreur, alors que si l'on évite cette erreur, le nombre irrationnel

---

[M] Ce paragraphe un peu obscur pour un non-mathématicien repose, comme Cantor le précise plus haut, sur l'introduction des nombres réels par Karl Weierstrass. On trouve une explication ici (pdf) : Joanne E. Snow / The Review of Modern Logic, Volume 9 Numbers 1 & 2 (November 2001–November 2003) [Issue 29], pp. 95–113. – 2003 – *Views on the real numbers and the continuum*. En particulier, il est difficile de comprendre ce passage si l'on ne sait pas que, au sens de Weierstrass, les « agrégats » sont des ensembles de « parties de l'unité » (1/n est la nième partie de l'unité) qui, sommés, donnent le nombre en question. Ainsi 4/3 peut correspondre aux agrégats {1/3, 1/3, 1/3, 1/3} et {1/2, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6}, etc. Un rationnel est ainsi une classe d'équivalence d'agrégats. Cette idée sera étendue aux réels avec des agrégats de parties de l'unité *infinis*.

s'établit dans notre esprit avec la même certitude, la même clarté et la même netteté que le nombre rationnel.

La forme de définition de M. Dedekind prend pour base l'intégralité de tous les nombres rationnels, mais ceux-ci divisés en deux groupes de telle sorte que, si les nombres du premier groupe sont désignés par $\mathfrak{A}_\nu$, ceux du second par $\mathfrak{B}_\mu$, on a toujours $\mathfrak{A}_\nu < \mathfrak{B}_\mu$; une telle division de l'ensemble des nombres rationnels, M. Dedekind l'appelle une coupure de celui-ci, la désigne par $(\mathfrak{A}_\nu|\mathfrak{B}_\mu)$, et lui associe un nombre b. Si l'on compare deux telles coupures $(\mathfrak{A}_\nu|\mathfrak{B}_\mu)$ et $(\mathfrak{A}_\nu'|\mathfrak{B}_\mu')$ on trouve, comme pour la *première* forme de définition, en tout *trois* possibilités selon lesquelles les nombres b et b' représentés par les deux coupures sont soit égaux entre eux, soit $b > b'$ soit $b < b'$. Le premier cas, hormis certaines exceptions faciles à régler en raison de la rationalité des nombres à définir, n'a lieu qu'en cas d'identité complète des deux coupures, et c'est là qu'apparaît l'avantage indéniable de cette forme de définition sur les deux autres, à savoir qu'à chaque nombre b ne correspond qu'une seule coupure, ce qui est toutefois contrebalancé par le grand inconvénient que les nombres ne se présentent *jamais* en analyse sous la forme de « coupures », dans laquelle ils doivent d'abord être amenés avec beaucoup d'adresse et de complication.

Suivent alors aussi les définitions de la somme $b + b'$ et du produit bb' sur la base de nouvelles coupures issues des deux données.

L'inconvénient lié à la *première* et à la *troisième* forme de définition, à savoir que les mêmes nombres, c'est-à-dire identiques, se présentent un nombre infini de fois et que, par conséquent, on n'obtient pas immédiatement une vue globale sans équivoque de tous les nombres réels, peut être éliminé avec la plus grande facilité au moyen de la Spécialisation[↔1] des ensembles (a_ν) pris pour base, en utilisant l'une quelconque des formations univoques connues de systèmes, comme le système décimal ou le simple développement en fractions continues.

J'en viens maintenant à la *troisième* forme de définition des nombres réels. Ici aussi, on se base sur un ensemble infini de nombres rationnels (a_ν) de la première puissance, mais on exige d'eux un autre caractère, comme dans la forme de définition de Weierstrass ; je demande qu'en supposant un nombre rationnel ε arbitrairement petit, on puisse isoler une quantité finie de maillons[↔2] de l'ensemble, de sorte que ceux

---

[↔1] « Specialisirung ». Comprendre : « canonisation ».

[↔2] « Gliedern ». Ce mot est systématiquement traduit « maillon » plutôt que « membre » ou « élément ». Ce choix assez peu orthodoxe s'explique par le même souci d'univocité de la traduction et de clarté pour un non-mathématicien. De plus, un élément d'un ensemble ne se situe pas nécessairement dans une relation d'ordre à l'intérieur de l'ensemble, alors que Cantor utilise toujours le mot « Glieder » pour désigner le membre d'une *série*, c'est-à-dire un élément qui se situe dans un certain ordre par rapport aux autres. On note d'ailleurs qu'il s'agit bien ici d'une *quantité* de maillons [Anzahl], donc d'une valeur tirée d'un *dénombrement*, action que l'on peut aussi se représenter comme l'égrènement d'un chapelet.

qui restent ont, deux à deux, une différence qui, en valeur absolue, est inférieure à ε. Tout ensemble (a_ν) de ce genre caractérisé par la condition :

$$\lim_{\nu=\infty}\left(a_{\nu+\mu} - a_\nu\right) = 0 \text{ (quel que soit } \mu)$$

je l'appelle *série fondamentale* et je lui associe le nombre b qu'elle définit, pour lequel on peut même utiliser à bon escient le signe (a_ν) lui-même, comme l'a proposé M. Heine, qui s'est joint à moi sur ces questions après de nombreuses discussions orales. (Cf. J. de Borchardt Vol. 74, p. 172). Une telle *série fondamentale* présente, comme on peut le déduire strictement de son concept, trois cas de figure ; soit ses maillons a_ν sont, pour des valeurs suffisamment grandes de ν, plus petits, en valeur absolue, qu'un nombre donné quelconque ; ou bien ils sont, à partir d'un certain ν, plus grands qu'un nombre rationnel positif ϱ déterminé ; ou bien elles sont, à partir d'un certain ν, plus petites qu'une grandeur rationnelle négative $-\varrho$ déterminée. Dans le premier cas, je dis que b est égal à zéro, dans le deuxième, que b est plus grand que zéro ou positif, dans le troisième, que b est inférieur à zéro ou négatif.

Viennent maintenant les opérations élémentaires. Si (a_ν) et (a_ν') sont deux *séries fondamentales* par lesquelles les nombres b et b' sont déterminés, il apparaît que $(a_\nu \pm a_\nu')$ et $(a_\nu \cdot a_\nu')$ sont aussi des *séries fondamentales* qui déterminent trois nouveaux nombres, lesquels me servent de définitions pour la somme et la différence $b \pm b'$ et pour le produit $b \cdot b'$.

Si de plus b est différent de zéro, selon la définition donnée plus haut, on prouve que $\left(\frac{a'_\nu}{a_\nu}\right)$ est aussi une *série fondamentale* dont le nombre associé donne la définition du quotient $\frac{b'}{b}$.

Les opérations élémentaires entre un nombre b donné par une série fondamentale (a_ν) et un nombre rationnel a donné directement sont contenues dans celles que l'on vient d'établir, en posant $a_\nu' = a, b' = a$.

C'est seulement maintenant qu'apparaissent les définitions de l'égalité, de la supériorité et de l'infériorité pour deux nombres b et b' (b' pouvant aussi être $= a$), et on dit que $b = b'$ ou $b > b'$ ou $b < b'$, selon que $b - b'$ est égal à zéro, ou plus grand ou plus petit que zéro.

Après toutes ces préparations, il en résulte une première règle *rigoureusement démontrable*, à savoir que si b est le nombre déterminé par une série fondamentale (a_ν), alors $b - a_\nu$, avec ν croissant, devient plus petit en valeur absolue que tout nombre rationnel imaginable, ou ce qui signifie la même chose, que :

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = b$$

Il faut prêter attention à ce point essentiel, dont la signification peut facilement être négligée : dans la *troisième* forme de définition, le nombre b n'est pas défini comme limite des maillons a_ν d'une série fondamentale (a_ν); car ce serait une erreur logique semblable à celle soulignée lors de la discussion de la *première* forme de définition, et cela pour la raison que l'existence de la limite $\lim_{\nu=\infty} a_\nu$ serait alors présumée ; Au contraire, la situation est telle que nos définitions précédentes ont conféré au concept b des propriétés et des relations avec les nombres rationnels telles que la conclusion peut en être tirée avec une évidence logique : $\lim_{\nu=\infty} a_\nu$ existe et est identique à b. On me pardonnera ici d'être si détaillé, motivé par la perception que la plupart des gens passent à côté de ce détail insignifiant et s'empêtrent alors facilement dans des ambiguïtés et des contradictions à propos de l'irrationnel, dont ils seraient totalement épargnés s'ils examinaient la situation mise en évidence ici ; car ils verraient alors clairement que le nombre irrationnel, *en raison du caractère qui lui est conféré par les définitions*, a dans notre esprit une Réalité aussi déterminée que le nombre rationnel, de même que le nombre rationnel entier, et qu'il n'est pas nécessaire de l'*obtenir* d'abord au moyen d'un processus-limite, mais qu'au contraire sa *possession* suffit à nous convaincre généralement de l'utilité et de l'évidence des processus-limites[8)] ; car il est désormais facile d'étendre la règle que nous venons d'énoncer à ce qui suit : Si (b_ν) est un ensemble quelconque de nombres rationnels ou irrationnels de constitution telle que $\lim_{\nu=\infty}\left(b_{\nu+\mu} - b_\nu\right) = 0$, (quel que soit μ), il existe un nombre b déterminé par une série fondamentale (a_ν) tel que :

$$\lim_{\nu=\infty} b_\nu = b$$

Il apparaît donc que les *mêmes* nombres b, qui sont définis sur la base de séries fondamentales (a_ν) (j'appelle ces séries fondamentales du *premier* ordre) de telle sorte qu'ils se présentent comme limites des (a_ν), sont aussi représentables de diverses manières comme limites de séries (b_ν), où chacun des b_ν, est défini par une série fondamentale du premier ordre $\left(a_\mu{}^{(\nu)}\right)$ (avec ν fixé).

J'appelle donc un tel ensemble (b_ν), s'il a une constitution telle que $\lim_{\nu=\infty}\left(b_{\nu+\mu} - b_\nu\right) = 0$ (pour tout μ), une série fondamentale du *deuxième* ordre.

De même, il est possible de former des séries fondamentales de *troisième*, quatrième, ... $n^{\text{ème}}$ ordre, mais aussi des séries fondamentales du $\alpha^{\text{ème}}$ ordre, où α est un nombre quelconque de la deuxième classe de nombres.

Toutes ces séries fondamentales font exactement la même chose pour la détermination d'un nombre réel b que les séries fondamentales du *premier* ordre, et la différence réside seulement dans la forme plus compliquée et plus large des données. Néanmoins, si l'on veut se placer du point de vue de la troisième forme de définition en général, il me semble tout à fait approprié de fixer cette distinction de la manière indiquée, comme je l'ai déjà fait de manière similaire à l'endroit cité (Math. Annalen Vol. V, p. 123). C'est pourquoi je m'exprime maintenant en ces termes : la grandeur numérique b est donnée au moyen d'une série fondamentale de $n^{\text{ème}}$ resp. $\alpha^{\text{ème}}$ ordre. Si l'on s'y résout, on obtient ainsi un langage extraordinairement fluide et en même temps compréhensible pour décrire de la manière la plus simple et la plus significative la richesse des tissages variés et souvent si complexes de l'analyse, ce qui permet d'obtenir un gain de clarté et de transparence non négligeable à mon avis. Je réponds ici au doute exprimé par M. Dedekind dans la préface de son ouvrage « *Stetigkeit und irrationale Zahlen* » concernant ces distinctions ; il n'était pas loin de mon intention d'introduire par les séries fondamentales de deuxième, troisième ordre, etc. de *nouveaux* nombres qui ne seraient pas déjà déterminables par les séries fondamentales du premier ordre, mais j'avais seulement en vue une forme conceptuellement différente des données ; cela ressort clairement de certains passages de mon propre travail.

Je voudrais ici attirer l'attention sur un fait remarquable, à savoir que dans ces ordres de séries fondamentales que je distingue au moyen des nombres de la première et de la deuxième classe de nombres, toutes les formes concevables en analyse, déjà trouvées ou encore à trouver, avec le caractère habituel des suites, sont tout à fait épuisées, en ce sens qu'il n'existe pas du tout de séries fondamentales dont l'index voudrait être désigné par un nombre de la troisième classe de nombres, comme je le prouverai rigoureusement à une autre occasion.

Je vais maintenant tenter d'expliquer brièvement l'utilité de la *troisième* forme de définition.

Pour désigner le fait qu'un nombre b est donné sur la base d'une série fondamentale e_ν d'un ordre quelconque n ou α, j'utilise les formules :

$$b \backsim (e_\nu) \text{ ou } (e_\nu) \backsim b$$

S'il y a par exemple une série convergente de maillon général c_ν, alors la condition nécessaire et suffisante pour la convergence est, comme on le sait, celle-ci : $\lim\limits_{\nu=\infty}\left(c_{\nu+1} + \cdots + c_{\nu+\mu}\right) = 0$ (où μ est quelconque).

On définit donc la somme de la série par la formule :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \sim \left(\sum_{n=0}^{\nu} c_n\right)$$

Si, par exemple, tous les c_n sont définis sur la base de séries fondamentales du $k^{\text{ème}}$ ordre, il en va de même pour $\sum_{n=0}^{\nu} c_n$ et la somme $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ nous apparaît ici comme définie par une série fondamentale du $(k+1)^{\text{ème}}$ ordre.

Par exemple, si l'on veut décrire le contenu conceptuel de la règle $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, on peut penser que $\frac{\pi}{2}$ et ses puissances sont donnés par les formules :

$$\frac{\pi}{2} \sim (a_\nu),\ \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1} \sim ({a_\nu}^{2m+1})$$

utilisant l'abréviation :

$$2\sum_{n=0}^{\nu}\frac{(-1)^n}{2n+1}=a_\nu$$

Nous aurons également :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sim\left(\sum_{m=0}^{\mu}(-1)^m\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1}}{(2m+1)!}\right)$$

c'est-à-dire que $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est défini sur la base d'une série fondamentale du second ordre, et cette règle exprime donc l'égalité du nombre rationnel 1 et d'un nombre $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donné sur la base d'une série fondamentale du second ordre.

De la même manière, le contenu conceptuel de formules plus compliquées, comme par exemple celles de la théorie des fonctions thêta, peut être décrit avec précision et relativement simplement, tandis si l'on se restreint à des séries infinies constituées de maillons rationnels purs, en particulier de signe toujours identique, et qui convergent inconditionnellement, on s'expose généralement à la plus grande complication ; avec la *troisième* forme de définition, contrairement à la *première*, on s'en préserve totalement, et il se trouve qu'on peut l'éviter tant qu'il ne s'agit pas de la détermination numérique par approximation de sommes de séries au moyen de nombres rationnels, mais uniquement de leurs définitions précises et inconditionnelles. Par ailleurs, la *première* forme de définition ne me semble pas si facile à utiliser lorsqu'il s'agit de la définition précise de sommes de séries qui ne sont pas nécessairement convergentes, mais dont l'ordonnancement des maillons, tant positifs que négatifs, est bien déterminé. Mais même dans le cas de séries à convergence inconditionnelle, l'effectuation de la somme, bien que cette dernière soit indépendante de l'ordonnancement, ne sera réellement réalisable que pour un ordonnancement déterminé ; on est donc tenté, même dans de tels cas, de donner la préférence à la *troisième* forme de définition plutôt qu'à la première. Enfin, il m'apparaît que la *troisième* forme de définition peut être généralisée à des nombres *au-delà du fini*, alors qu'un tel façonnement est entièrement *impossible* pour la *première* forme de définition ; cette différence est simplement due au fait que, pour les nombres au-delà du fini, la loi de commutativité est déjà invalide pour l'addition en général ; mais la première forme de définition est *indissociable* de cette loi et repose sur elle. Cependant, pour tous les types de nombres où la loi de commutativité de l'addition est valable, la *première* forme de définition se révèle, à l'exception des points désignés, entièrement valable.

§ 10.

Le concept de « continuum » a non seulement joué partout un rôle important dans le développement des sciences, mais il a aussi toujours suscité les plus grandes divergences d'opinion et même de violentes disputes. Cela est peut-être dû au fait que l'idée qui le sous-tend s'est manifestée chez les adversaires avec un contenu différent parce que la définition exacte et complète du concept ne leur a pas été transmise ; mais peut-être aussi, et c'est à mon avis le plus probable, que l'idée du continuum n'a pas été pensée par les Grecs, qui ont été les premiers à s'en emparer, avec la clarté et l'exhaustivité nécessaires pour exclure la possibilité de conceptions différentes de la part des successeurs. Nous voyons ainsi que Leucippe, Démocrite et Aristote considèrent le continuum comme un composite [Compositum] qui existe ex partibus sine fine divisibilibus, tandis qu'Épicure et Lucrèce le composent à partir de leurs atomes, en tant que choses finies, d'où il s'en est ensuivi une grande dispute entre les philosophes, dont certains ont suivi Aristote et d'autres Épicure ; d'autres encore, pour éviter cette controverse, statuaient avec Thomas d'Aquin,[9)] que le continuum n'était composé ni d'une infinité de parties, ni d'une quantité finie de parties, mais *d'aucune* partie du tout ; cette dernière opinion me semble moins contenir une explication des faits que l'aveu implicite que l'on n'est pas allé au fond des choses et que l'on préfère les éviter avec soin. Nous voyons ici *l'origine médiévale et scolastique* d'un point de vue que nous trouvons encore aujourd'hui, selon laquelle le continuum serait un concept indécomposable ou encore, comme d'autres le disent, une pure vision aprioristique, à peine accessible à une détermination par des concepts ; toute *tentative de Détermination* arithmétique de ce *mystère* est considérée comme une intervention illicite et rejetée avec la vigueur qui convient ; les plus timorés ont le sentiment que le « continuum » n'est pas un *concept logico-mathématique* mais plutôt un *dogme religieux*.

Loin de moi l'idée d'évoquer à nouveau ces questions litigieuses, et je n'aurais pas la place d'en discuter plus en détail dans ce cadre restreint ; je me vois seulement dans l'obligation de développer ici le concept de continuum, aussi brièvement que possible et en tenant compte uniquement de la théorie *mathématique* des ensembles, de la manière logique et sobre dont je dois le concevoir et dont j'ai besoin pour la théorie des multiplicités. Ce traitement ne m'a pas été facile parce que, parmi les mathématiciens dont j'aime à invoquer l'autorité, aucun n'a étudié le continuum avec davantage de précision que j'en ai besoin ici.

En prenant pour base une ou plusieurs grandeurs continues réelles ou complexes (ou, comme je crois pouvoir l'exprimer plus justement, des ensembles continus de grandeurs), on a certes le concept d'un continuum qui en dépend univoquement ou équivoquement, c'est-à-dire le concept de fonction continue, développé de la meilleure façon dans diverses directions, et c'est de cette manière qu'a été forgée la théorie des fonctions dites *analytiques*, ainsi que des fonctions plus générales, avec leurs phénomènes très remarquables (comme la non-différentiabilité entre autres) ; mais le continuum *indépendant* n'a été lui-même envisagé par les auteurs mathématiques que sous sa forme la plus simple et n'a pas été soumis à un examen approfondi.

Tout d'abord, je dois expliquer qu'il n'est selon moi pas logique [nicht in der Ordnung] de faire appel au *concept de temps* ou à la *vision du temps* lorsque l'on examine le concept bien plus primitif et général de continuum ; le *temps* est, à mon avis, une notion qui, pour être clairement expliquée, a pour condition préalable le concept indépendant de continuité, et qui, même avec l'aide de celui-ci, ne peut être conçu ni objectivement comme une substance, ni subjectivement comme une forme de vision a priori et nécessaire, mais qui n'est rien d'autre qu'un *concept auxiliaire et relationnel*, par lequel est établie une Relation entre différents mouvements qui se produisent dans la nature et que nous percevons. Une chose telle que le *temps objectif* ou *absolu* n'apparaît nulle part dans la nature et, par conséquent, le *temps* ne peut pas être considéré comme la mesure du *mouvement*, mais celui-ci pourrait plutôt être considéré comme la mesure du *temps*, si cela ne s'opposait pas au fait que le temps lui-même, dans le modeste rôle d'une forme de vision subjective, a priori et nécessaire, n'a jamais connu une prospérité fructueuse et incontestée, bien que, depuis Kant, le temps n'eut pas manqué pour cela.

J'ai également la conviction qu'on ne peut rien faire avec la soi-disant *forme de vision* de l'*espace* pour obtenir des informations sur le *continuum*, puisque l'*espace* et les structures qui y sont imaginées n'acquièrent le contenu qu'à l'aide d'un continuum conceptuellement déjà accompli par lequel ils peuvent devenir l'objet non seulement de considérations esthétiques, d'ingéniosité philosophique ou de comparaisons approximatives, mais aussi d'investigations mathématiques sobres et exactes.

Il ne me reste donc plus qu'à tenter, à l'aide des concepts de nombres réels définis au § 9, d'obtenir un concept purement arithmétique aussi général que possible d'un continuum ponctuel. Pour cela, je me base, comme il ne peut en être autrement, sur l'espace *arithmétique* plan à n dimensions G_n, c'est-à-dire sur la collection [Inbegriff] de tout le système de valeurs :

$$(x_1 | x_2 | \dots | x_n),$$

dans lequel chaque x peut recevoir, indépendamment des autres, *toutes* les valeurs numériques *réelles* de $-\infty$ à $+\infty$. J'appelle tout système particulier de valeurs de ce genre un point *arithmétique* de G_n. La distance entre deux de ces points est définie par l'expression :

$$+\sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + \cdots + (x'_n - x_n)^2}$$

et par un ensemble-de-points *arithmétique* P inclus dans G_n, on entend toute collection légalement donnée de points de l'espace G_n. Le problème consiste donc à établir une définition précise et en même temps aussi générale que possible de la question de savoir *quand P doit être appelé un continuum*.

J'ai prouvé dans le J. de Borchardt Vol. 84, p. 242 que quel que soit n, la quantité de dimensions, tous les espaces G_n ont la *même* puissance et sont donc *aussi puissants* que le continuum linéaire, comme par exemple la collection de tous les nombres réels de l'intervalle $(0 \dots 1)$. L'étude et l'identification de la puissance de G_n se réduisent donc à la même question, réduite à l'intervalle $(0 \dots 1)$, et j'espère pouvoir y répondre bientôt par une preuve rigoureuse que la puissance recherchée n'est autre que celle de notre deuxième classe de nombres (II). De là il suit que tous les ensembles-de-points infinis P ont soit la puissance de la première classe de nombres (I), soit la puissance de la seconde classe de nombres (II). On pourra aussi en tirer une autre conséquence, à savoir que la collection de toutes les fonctions d'une ou plusieurs variables, qui sont représentables sous la forme d'une suite infinie donnée, quelle qu'elle soit, ne possède *que* la puissance de la deuxième classe de nombres (II) et est donc *dénombrable au moyen* des nombres de la troisième classe de nombres (III).[10)] Cette règle se rapportera donc, par exemple, à la collection de toutes les fonctions « analytiques », c'est-à-dire résultant du prolongement de séries convergentes, d'une ou plusieurs variables, ou à l'ensemble de toutes les fonctions d'une ou plusieurs variables réelles, qui sont représentables au moyen de séries trigonométriques.

Pour approcher maintenant le concept général d'un continuum situé à l'intérieur de G_n, je rappelle que le concept de dérivée $P^{(1)}$ d'un ensemble-de-points P donné arbitrairement, tel qu'il est présenté d'abord dans les travaux Math. Annalen Vol. V, puis dans les Vol. XV, XVII, XX et XXI, se trouve étendu au concept d'une dérivée $P^{(\gamma)}$, où γ peut être un nombre entier quelconque de l'une des classes de nombres (I), (II), (III), etc.

Les ensembles-de-points P peuvent aussi être divisés en deux classes selon la puissance de leur dérivée première $P^{(1)}$. Si $P^{(1)}$ a la puissance de (I), il apparaît, comme je l'ai déjà indiqué au § 3 de ce document, qu'il existe un premier nombre entier α de la *première* ou de la *deuxième* classe de nombres (II), pour lequel $P^{(\alpha)}$ s'évanouit. Mais si $P^{(1)}$ a la puissance de la deuxième classe de nombres (II), alors $P^{(1)}$ se décompose toujours, et d'une seule manière, en deux ensembles R et S, de sorte que :

$$P^{(1)} \equiv R + S,$$

où R et S ont une constitution bien différente :

R est tel que, par le processus de dérivation répété, il est capable d'une réduction continue jusqu'à disparaître, de sorte qu'il existe toujours un premier nombre entier γ des classes de nombres (I) ou (II), pour lequel :

$$R^{(\gamma)} \equiv 0;$$

j'appelle *réductibles* de tels ensembles-de-points R.

S, en revanche, est tel que pour cet ensemble-de-points, le processus de dérivation ne produit aucune modification, en ce sens que :

$$S \equiv S^{(1)}$$

et on a donc aussi :

$$S \equiv S^{(\gamma)}$$

J'appelle ces ensembles S des ensembles-de-points *parfaits*. Nous pouvons donc dire que si $P^{(1)}$ a la puissance de la deuxième classe de nombres (II), alors $P^{(1)}$ se décompose en un ensemble-de-points *réductible* déterminé et un ensemble-de-points *parfait* déterminé.

Bien que ces deux prédicats « réductible » et « parfait » soient incompatibles pour un seul et même ensemble-de-points, irréductible n'est cependant pas parfait, pas plus qu'imparfait n'est exactement la même chose que réductible, comme on le voit aisément avec un peu d'attention.

Les ensembles-de-points *parfaits* S sont loin d'être toujours à l'intérieur ce que j'ai appelé dans mes travaux cités plus haut « partout denses »[11)] ; c'est pourquoi ils ne suffisent pas à la définition complète d'un continuum ponctuel, même si l'on doit admettre immédiatement que ce dernier doit toujours être un ensemble *parfait*.

Il faut encore un autre concept pour définir le continuum en combinaison avec le précédent, à savoir le concept d'un ensemble-de-points T *connexe*.

Nous disons qu'un ensemble-de-points T est *connexe*, lorsque pour deux points t et points t' de celui-ci, pour un nombre ε donné arbitrairement petit, il y a toujours une quantité *finie* de points $t_1, t_2, \dots t_\nu$ de T, existant de multiples façons, de sorte que les distances $\overline{tt_1}$, $\overline{t_1t_2}$, $\overline{t_2t_3}$, ... $\overline{t_\nu t'}$ sont toutes inférieures à ε.

Tous les continuums ponctuels géométriques que nous connaissons tombent maintenant, comme on le voit facilement, sous ce concept d'ensemble-de-points *connexe*; mais je crois aussi reconnaître dans ces *deux* prédicats « parfait » et « connexe » les attributs nécessaires et *suffisants* d'un continuum ponctuel, et je définis donc un continuum ponctuel à l'intérieur de G_n, comme un *ensemble parfait-connexe*.[12)] Ici, « parfait » et « connexe » ne sont pas de simples mots, mais des prédicats tout à fait généraux du *continuum*, caractérisés conceptuellement de la manière la plus nette par les définitions précédentes.

La définition bolzanienne du continuum (Paradoxien § 38) n'est assurément pas correcte ; elle n'exprime qu'*une seule* des propriétés du continuum, mais qui est aussi satisfaite par les ensembles qui proviennent de G_n par le fait que l'on imagine enlever un ensemble-de-points « isolé » quelconque (cf. Math. Annalen Vol. XXI, p. 51) ; de même, elle est satisfaite dans le cas d'ensembles consistant en plusieurs continuums distincts ; Il n'y a évidemment pas de continuum dans de tels cas, bien que, selon Bolzano, ce serait le cas : Nous observons donc ici une violation de la règle : « ad essentiam alicujus rei pertinet id, quo dato res necessario ponitur et quo sublato res necessario tollitur; vel id, sine quo res, et vice versa quod sine re nec esse nec concipi potest. » [↔1]

[↔1] Extrait de l'Éthique de Spinoza : « À l'essence de toute chose appartient ce par quoi la chose donnée est nécessairement placée, et ce par quoi, une fois enlevé, la chose est nécessairement enlevée ;

De même, il me semble que l'ouvrage de M. Dedekind (*Stetigkeit und irrationale Zahlen*) ne fait que mettre en évidence une seule *autre* propriété du continuum, à savoir celle qu'il a en commun avec *tous* les ensembles « *parfaits* ».

§ 11.

Il s'agit maintenant de montrer comment on est conduit aux définitions des nouveaux nombres et de quelle manière s'obtiennent les sections naturelles dans la suite absolue-infinie des nombres entiers actuels, que j'appelle *classes de nombres*. Je n'apporterai à cette explication que les règles essentielles concernant la *deuxième* classe de nombres et son rapport avec la première. La série (I) des nombres entiers actuels positifs $1, 2, 3, \dots, \nu, \dots$ trouve sa raison d'être dans l'actualisation[↔1] et le regroupement répétés d'unités considérées comme identiques ; le nombre ν est l'expression aussi bien d'une quantité finie déterminée de ces actualisations successives que du regroupement des unités accumulées en un tout. La formation des nombres entiers actuels finis repose donc sur le principe de l'ajout d'une unité à un nombre existant déjà constitué ; j'appelle ce moment qui, comme nous le verrons bientôt, joue aussi un rôle essentiel dans la génération des nombres entiers supérieurs, le *premier principe générateur*. La quantité des nombres ν de la classe (I) à construire ainsi est infinie et il n'y a pas de plus grand d'entre eux. S'il est donc contradictoire de parler d'un plus grand nombre de la classe (I), il n'y a rien de choquant, d'autre part, à concevoir un *nouveau* nombre, que nous appellerons ω[*], et qui serait l'expression du fait que toute la collection (I) est donnée, suivant la loi, dans sa succession naturelle. (De même que ν est une expression indiquant qu'une certaine quantité finie d'unités sont réunies en un tout.) Il est même permis de concevoir le nombre ω nouvellement créé comme la *limite* vers laquelle tendent les nombres ν, si l'on n'entend par là rien d'autre que le fait que ω doit être le *premier* nombre entier qui suit tous les nombres ν, c'est-à-dire qui doit être dit plus grand que chacun des nombres ν. En faisant suivre l'actualisation du nombre ω par d'autres actualisations de l'unité, on obtient, à l'aide du *premier* principe générateur, les autres nombres

$$\omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega + \nu, \dots ;$$

---

ou bien ce sans quoi la chose ne peut ni être ni être conçue, et réciproquement ce qui ne peut ni être ni être conçu sans la chose. »

[↔1] Le terme « Setzung » est à la fois délicat à traduire et essentiel dans le texte de Cantor. Il désigne le *moment créateur* par lequel un nombre est porté à l'existence, en quelque sorte actualisé ou achevé, en même temps que l'opération elle-même qui le constitue : l'ajout d'une unité ou l'achèvement d'une succession de tels ajouts. Nous le traduisons ici (improprement) par « actualisation », plus souple que « création », « effectuation », voire « accumulation ».

[*] Le signe ∞ que j'ai utilisé dans le n° 2 de cet essai (vol. XVII, p. 357), je le remplace désormais par ω, car le signe ∞ est déjà largement utilisé pour désigner des infinis indéterminés.

[et] comme on n'arrive là encore à aucun plus grand nombre, on en imagine un nouveau, que l'on peut appeler 2ω et qui doit être le premier à suivre tous les nombres ν et $\omega + \nu$ qui précèdent ; si l'on applique à plusieurs reprises le *premier* principe générateur au nombre 2ω, on aboutit au prolongement :

$$2\omega + 1, 2\omega + 2, \dots, 2\omega + \nu, \dots$$

des nombres précédents.

La fonction logique qui nous a fourni les deux nombres ω et 2ω est manifestement différente du *premier* principe générateur ; je l'appelle le *second principe générateur* de nombres entiers actuels et je le définis plus précisément en ce sens que lorsqu'il existe une succession déterminée quelconque de nombres entiers actuels définis, parmi lesquels il n'existe pas de plus grand, on crée, sur la base de ce second principe générateur, un nouveau nombre qui est conçu comme la *limite* de ces nombres, c'est-à-dire qui est défini comme le nombre immédiatement plus grand que tous ceux-ci.

Par l'application combinée des deux principes générateurs, on obtient donc successivement les prolongements suivants de nos nombres obtenus jusqu'ici :

$$3\omega + 1, 3\omega + 2, \dots, 3\omega + \nu, \dots$$

....

$$\mu\omega + 1, \mu\omega + 2, \dots, \mu\omega + \nu, \dots$$

....

Mais là encore il n’y a pas d’aboutissement car, de la même façon, aucun parmi les nombres $\mu\omega + \nu$ n’est le plus grand.

Le second principe générateur nous amène donc à introduire un nombre qui suit immédiatement tous les nombres $\mu\omega + \nu$, qui peut être appelé ω^2, et auquel se rattachent des nombres selon une succession déterminée :

$$\lambda\omega^2 + \mu\omega + \nu,$$

et, en appliquant les deux principes générateurs, on obtient clairement des nombres de la forme suivante :

$$\nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} \dots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu$$

mais le second principe générateur nous force alors à actualiser un nouveau nombre, qui doit être le plus grand de tous ces nombres, et qui est désigné de la bonne manière par :

$$\omega^\omega$$

La formation de nouveaux nombres, comme on le voit, n'a pas de fin ; en appliquant les deux principes générateurs, on obtient toujours de nouveaux nombres et de nouvelles séries numériques selon une succession tout à fait déterminée.

On a ainsi avant tout l'*impression* qu'avec ce mode de formation de nouveaux nombres entiers infinis-déterminés, nous devons nous perdre dans l'*Illimité*, et que nous sommes incapables de donner à ce processus sans fin un *quelconque* aboutissement *provisoire*, et d'obtenir ainsi une restriction semblable à celle qui existait effectivement en un certain sens par rapport à l'ancienne classe de nombres (I) ; dans ce cas, seul le *premier* principe générateur est utilisé, rendant ainsi impossible tout échappement de la série (I). Le *second* principe générateur ne doit pas seulement conduire au-delà du domaine numérique antérieur, mais se révèle être un moyen qui, en combinaison avec le *premier* principe générateur, donne la possibilité de *rompre toute barrière* dans la conceptualisation des nombres entiers actuels.

Or, si nous remarquons que tous les nombres obtenus jusqu'ici et ceux qui les suivent immédiatement remplissent une certaine condition, cette condition, *lorsqu'elle est posée comme exigence préalable pour tous les nombres à former*, se révèle être un *troisième* principe nouveau qui s'ajoute à ces deux-là, que j'appelle principe de *blocage* ou de *restriction* et qui, comme je le montrerai, fait que la deuxième classe de nombres (II) définie par son application, a non seulement une puissance supérieure à (I), mais même exactement celle immédiatement supérieure, c'est-à-dire la *deuxième* puissance.

La condition mentionnée, que remplit chacun des nombres infinis α définis jusqu'ici, comme on s'en convainc immédiatement, est que l'ensemble des nombres qui précèdent ce nombre dans la suite des nombres est de la puissance de la première classe de nombres (I). Si nous prenons par exemple le nombre ω^{ω}, ceux qui le précèdent sont inclus dans la formule :

$$\nu_0\omega^{\mu} + \nu_1\omega^{\mu-1} \ldots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_{\mu},$$

où $\mu, \nu_0, \nu_1, \ldots \nu_{\mu}$ peuvent prendre toutes les valeurs numériques entières, positives, finies, en incluant le zéro et en excluant le cas : $\nu_0 = \nu_1 = \cdots = \nu_{\mu} = 0$.

Comme on le sait, cet ensemble peut être mis sous la forme d'une série simple infinie et a donc la puissance de (I).

De plus, comme toute suite d'ensembles, dont chacun a la *première* puissance, si cette suite est elle-même de la *première* puissance, donne toujours un ensemble qui a la puissance de (I), il est donc clair que par le prolongement de notre suite des nombres, *on n'obtiendra en réalité dans un premier temps que des nombres de ce genre*, pour lesquels cette condition est *effectivement* remplie.

Nous définissons donc la deuxième classe de nombres (II) *comme la collection de tous les nombres α qui peuvent être formés à l'aide des deux principes générateurs et qui progressent selon une succession déterminée* :

$$\omega, \omega + 1, \ldots, \nu_0\omega^{\mu} + \nu_1\omega^{\mu-1} \ldots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_{\mu}, \ldots, \omega^{\omega}, \ldots, \alpha \ldots$$

et qui sont soumis à la condition que tous les nombres précédant le nombre α, à partir de 1, *forment un ensemble de la puissance de la classe de nombres* (I).

§ 12.

La première chose que nous avons à démontrer est la règle selon laquelle *la nouvelle classe de nombres* (II) *a une puissance différente de celle de la première classe de nombres* (I).

Cette règle provient de la règle suivante :

« Si $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ est un ensemble *quelconque*, ayant la première puissance, de différents nombres de la *seconde* classe de nombres (de sorte que nous sommes autorisés à les prendre sous cette forme de suite simple (α_ν)), alors soit l'un d'eux est le plus grand, c'est γ, soit, si ce n'est pas le cas, alors il existe un nombre déterminé β de la deuxième classe de nombres (II) qui ne se trouve pas parmi les nombres α_ν, de sorte que β est plus grand que tous les α_ν, mais qu'en revanche tout nombre entier $\beta' < \beta$ est dépassé en grandeur par certains nombres de la série (α_ν) ; les nombres γ et β, respectivement, peuvent aisément être appelés la limite supérieure de l'ensemble (α_ν). »

La preuve de cette règle est simplement la suivante : soit α_{x_2}, dans la série (α_ν) le premier nombre qui apparaît, qui est plus grand que α_1, puis α_{x_3} le premier qui apparaît, qui est plus grand que α_{x_2}, etc.

On a alors :

$$1 < x_2 < x_3 < x_4 < \cdots$$

$$\alpha_1 < \alpha_{x_2} < \alpha_{x_3} < \alpha_{x_4} < \cdots$$

et

$$\alpha_\nu < \alpha_{x_\lambda},$$

dès que

$$\nu < x_\lambda.$$

Or, ici, il peut arriver qu'à partir d'un certain nombre α_{x_ϱ} tous ceux qui le suivent dans la série (α_ν) soient plus petits que lui ; alors il est évidemment le plus grand de tous et nous avons : $\gamma = \alpha_{x_\varrho}$. Ou alors, on conçoit l'ensemble de tous les nombres entiers depuis 1 qui sont plus petits que α_1, on ajoute à cet ensemble pour commencer l'ensemble de tous les nombres entiers qui sont $\geq \alpha_1$, et $< \alpha_{x_2}$, puis l'ensemble de tous les nombres qui sont $\geq \alpha_{x_2}$, et $< \alpha_{x_3}$, etc. et on obtient une partie déterminée de nombres successifs de nos deux premières classes de nombres, et cet ensemble de nombres est clairement de la *première* puissance, et il existe donc (d'après la définition de (II)) un nombre β déterminé de la collection (II), qui est le plus grand immédiat de ces nombres. On a donc $\beta > \alpha_{x_\lambda}$, et donc aussi : $\beta > \alpha_\nu$, parce que x_λ peut toujours être supposé si grand qu'il devient plus grand qu'un ν donné, et parce que, dans ce cas : $\alpha_\nu < \alpha_{x_\lambda}$.

D'autre part, on voit facilement que tout nombre $\beta' < \beta$ est dépassé en grandeur par certains nombres α_{k_ν} ; ce qui prouve maintenant toutes les parties de la règle.

De là suit maintenant la règle que l'intégralité de tous les nombres de la deuxième classe de nombres (II) n'a pas la puissance de (I) ; car sinon nous penserions à toute la collection (II) sous la forme d'une série simple :

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu, \dots$$

qui, d'après la règle que nous venons de démontrer, ou bien aurait un plus grand maillon γ, ou bien serait dépassée par un certain nombre β de (II) quant à la grandeur de tous ses maillons α ; dans le premier cas, le nombre $\gamma + 1$ appartient à la classe (II), dans le second cas, le nombre β appartiendrait d'une part à la classe (II), et d'autre part ne se trouverait pas dans la série (α_ν), ce qui est contradictoire avec l'identité supposée des ensembles (II) et (α_ν) ; par conséquent, la classe de nombres (II) a une puissance différente de celle de la classe de nombres (I).

Concernant les deux puissances des classes de nombres (I) et (II) la seconde est bien celle qui *suit immédiatement* la première, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas d'autres puissances entre les deux, et cela ressort avec certitude d'une règle que je vais immédiatement énoncer et prouver.

Mais si nous jetons d'abord un regard en arrière et que nous nous rappelons les moyens qui ont conduit à la fois à une extension du concept de nombre entier actuel et à une nouvelle puissance d'ensembles bien définis, différente de la première, ce sont trois moments logiques distincts qui sont entrés en action. Il s'agit des *deux principes générateurs* définis ci-dessus et d'un *principe de blocage* ou de *restriction* qui s'ajoute à ceux-ci et qui consiste en l'exigence de ne procéder à la création d'un nouveau nombre entier à l'aide de l'un des deux autres principes que si l'intégralité de tous les nombres précédents, déjà disponible dans toute son étendue, a la puissance d'une classe de nombres définie. En continuant de cette façon, en observant ces trois principes, on peut arriver avec la plus grande confiance et la plus grande évidence à des classes de nombres toujours nouvelles et, avec elles, à toutes les puissances différentes et successivement croissantes qui se présentent dans la nature physique et spirituelle, et les nouveaux nombres ainsi obtenus ont toujours tout à fait la même certitude concrète et la même Réalité objective que les précédents ; Je ne vois donc vraiment pas ce qui pourrait nous restreindre dans cette activité de formation de nouveaux nombres, dès qu'il apparaît que, pour le progrès des sciences, l'introduction dans les réflexions de l'une nouvelle de ces innombrables classes de nombres est devenue souhaitable ou même indispensable.

§ 13.

J'en viens maintenant à la démonstration promise, à savoir que les puissances de (I) et de (II) se suivent immédiatement l'une l'autre, de sorte qu'il n'y a pas d'autres puissances entre elles.

Si l'on choisit dans la collection (II), selon une loi quelconque, un ensemble (α') de nombres α' distincts, c'est-à-dire si l'on pense à un ensemble (α') quelconque inclus dans (II), un tel ensemble a toujours des caractéristiques qui peuvent s'exprimer par les règles suivantes.

« Parmi les nombres de l'ensemble (α'), il y a toujours un plus petit. »

« Si l'on a, en particulier, une suite de nombres de la collection (II) : $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\beta, \dots$, qui diminuent continuellement en grandeur (de sorte que $\alpha_\beta > \alpha_{\beta'}$ si $\beta' > \beta$), cette série s'interrompt nécessairement avec un maillon numérique fini et se termine avec le plus petit des nombres ; la série ne peut pas être infinie. »

Il est remarquable que cette règle, qui est immédiatement claire lorsque les nombres α_β sont des nombres entiers finis, se démontre aussi dans le cas des nombres α_β infinis. En effet, d'après la règle précédente, qui procède aisément de la définition de la série numérique (II), il y a parmi les nombres α_ν, si l'on ne considère que ceux d'entre eux dont l'indice ν est fini, un plus petit ; si celui-ci est par exemple = α_ϱ, alors il est évident que, à cause de $\alpha_\nu > \alpha_{\nu+1}$, la série α_ν, et donc aussi toute la série α_β, doit être composée exactement de ϱ maillons, donc être une série finie.

On obtient alors la règle fondamentale suivante :

« Si (α') est un ensemble de nombres quelconque inclus dans la collection (II), il ne peut y avoir que les trois cas suivants : ou bien (α') est une collection finie, c'est-à-dire se compose d'une quantité finie de nombres, ou bien (α') a la puissance de la première classe, ou bien, troisièmement, (α') a la puissance de (II) ; Quartum non datur. »

La preuve peut être amenée simplement de la manière suivante : soit Ω le premier nombre de la *troisième* classe de nombres (III) ; alors tous les nombres α' de l'ensemble (α'), parce que ce dernier est inclus dans (II), sont inférieurs à Ω.

Nous imaginons maintenant les nombres α' classés selon leur grandeur ; soit α_ω le plus petit d'entre eux, $\alpha_{\omega+1}$ le plus grand immédiat, etc., on obtient l'ensemble (α') sous la forme d'un ensemble « bien ordonné » α_β, où β passe par des nombres de notre série numérique naturelle étendue à partir de ω ; clairement, β reste ici toujours inférieur ou égal à α_β, et comme $\alpha_\beta < \Omega$, on a donc aussi $\beta < \Omega$. Le nombre β ne peut donc pas dépasser la classe des nombres (II), mais reste à l'intérieur de son domaine ; il ne peut donc y avoir que trois cas : soit β reste en deçà d'un nombre spécifiable de la série $\omega + \upsilon$, auquel cas (α') est un ensemble fini ; ou bien β prend toutes les valeurs de la série $\omega + \upsilon$, mais reste au-dessous d'un nombre spécifiable de la série (II), et alors (α') est évidemment un ensemble de la *première* puissance ; ou troisièmement β prend aussi des valeurs arbitrairement grandes dans (II), alors β parcourt *tous* les nombres de (II) ; dans ce dernier cas, la collection (α_β), c'est-à-dire l'ensemble (α') a évidemment la puissance de (II) ; c.q.f.d.

Les conséquences immédiates de la règle que nous venons de démontrer sont les suivantes :

« Si l'on dispose d'un ensemble bien défini M quelconque de la puissance de la classe de nombres (II) et que l'on prend une partie infinie M' quelconque de l'ensemble M, soit on peut concevoir la collection M' sous la forme d'une série simplement infinie, soit il est possible d'associer mutuellement et univoquement les deux ensembles M' et M. »

« Si l'on dispose d'un ensemble bien défini M quelconque de la deuxième puissance, d'une partie M' de l'ensemble M et d'une partie M'' de l'ensemble M', et que l'on sait que ce dernier M'' est mutuellement et univoquement associable au premier M, alors le deuxième M' est toujours mutuellement et univoquement associable au premier et donc au troisième. »

J'énonce ici cette dernière règle, en raison de son lien avec les précédentes, en supposant que M a la puissance de (II) ; clairement, elle est également correcte si M a la puissance de (I) ; mais il me semble extrêmement remarquable, et c'est pourquoi je le souligne expressément, que cette règle a une validité *générale*, quelle que soit la puissance de l'ensemble M. J'en parlerai plus en détail dans un prochain traité, et je démontrerai alors l'intérêt propre qui se rattache à cette règle générale.

§ 14.

Je veux maintenant, pour terminer, soumettre à l'examen les nombres de la deuxième classe de nombres (II) et les opérations qu'on peut effectuer avec eux, mais je me restreindrai en cette occasion à ce qui est le plus immédiat, me réservant de publier plus tard des études approfondies à ce sujet.

J'ai défini les opérations d'addition et de multiplication de manière générale au § 1[↔], et j'ai montré que, pour les nombres entiers infinis, elles ne sont généralement *pas* soumises à la loi commutative, mais à la loi d'associativité ; cela vaut donc aussi en particulier pour les nombres de la deuxième classe de nombres. En ce qui concerne la loi de distributivité, elle-même n'est en général applicable que sous la forme suivante :

$$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$$

(où $\alpha + \beta$, α, β apparaissent en tant que multiplicateurs),

comme on le reconnaît immédiatement par la vision intérieure.

La soustraction peut être considérée de deux côtés. Si α et β sont deux nombres entiers quelconques, $\alpha < \beta$, on se persuade facilement que l'équation :

$$\alpha + \xi = \beta$$

[↔] Il s'agit plus probablement du § 3.

admet toujours une et une seule solution ξ où, si α et β sont des nombres de (II), ξ sera un nombre de (I) ou de (II). Ce nombre ξ sera égal à $\beta - \alpha$.

En revanche, si l'on considère l'équation suivante :

$$\xi + \alpha = \beta$$

il s'avère que celle-ci n'est souvent pas du tout soluble en ξ, cas qui se présente par exemple avec l'équation suivante :

$$\xi + \omega = \omega + 1$$

Mais même dans les cas où l'équation : $\xi + \alpha = \beta$ est soluble en ξ, il se trouve souvent qu'elle est satisfaite par une infinité de valeurs numériques de ξ ; mais de ces différentes solutions, l'une sera toujours la plus petite.

Pour cette plus petite racine de l'équation :

$$\xi + \alpha = \beta,$$

lorsque cette dernière est soluble, nous choisissons la désignation $\underline{\beta_\alpha}$, qui est donc en général différent de $\beta - \alpha$, ce dernier nombre étant toujours disponible seulement si $\alpha < \beta$.

De plus, lorsqu'il existe entre trois nombres entiers β, α, γ l'équation :

$$\beta = \gamma\alpha$$

(où γ est le multiplicateur), on se convainc facilement que l'équation :

$$\beta = \xi\alpha$$

en ξ n'a pas d'autre résolution que $\xi = \gamma$ et on désigne dans ce cas γ par $\frac{\beta}{\alpha}$.

En revanche, on constate que l'équation :

$$\beta = \alpha\xi$$

(où ξ est le multiplicande), si tant est qu'elle soit soluble en ξ, a souvent plusieurs et même une infinité de racines, mais l'une d'entre elles est toujours la plus petite ; cette plus petite racine satisfaisant l'équation : $\beta = \alpha\xi$, si tant est que cette dernière soit soluble, est désignée par :

$$\frac{\beta}{\overline{\overline{\alpha}}}$$

Les nombres α de la deuxième classe de nombres sont de deux espèces : 1) les α qui ont un maillon qui les précède immédiatement dans la série, qui est alors $\underline{\alpha}_1$, j'appelle ces nombres de la première espèce. 2) les α qui n'ont pas un maillon qui les précède immédiatement dans la série, pour lesquels donc $\underline{\alpha}_1$ n'existe pas ; j'appelle ces nombres de la *seconde* espèce. Par exemple, les nombres $\omega, 2\omega, \omega^\nu + \omega, \omega^\omega$ sont de la seconde espèce, alors que $\omega + 1, \omega^2 + \omega + 2, \omega^\omega + 3$ sont de la première espèce.

En conséquence, les nombres premiers de la deuxième classe de nombres, que j'ai définis en général au § 1[↔], se divisent en nombres premiers de la seconde espèce et en nombres premiers de la première espèce.

Les nombres premiers de la seconde espèce sont les suivants dans l'ordre d'apparition dans la classe de nombres (II) :

$$\omega, \omega^{\omega}, \omega^{\omega^2}, \omega^{\omega^3}, \ldots,$$

de sorte que, parmi tous les nombres de la forme :

$$\varphi = \nu_0\omega^{\mu} + \nu_1\omega^{\mu-1} + \cdots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_{\mu}$$

seul le nombre premier ω de la *seconde* espèce est présent ; mais que l'on ne conclue pas de cette distribution relativement peu nombreuse des nombres premiers de la seconde espèce que leur collection a une puissance inférieure à celle de la classe de nombres (II) elle-même ; il se trouve que cet collection a la même puissance que (II).

Les nombres premiers de la première espèce sont d'abord :

$$\omega + 1, \omega^2 + 1, \ldots, \omega^{\mu} + 1, \ldots$$

Ce sont les seuls nombres premiers de la première *espèce* qui apparaissent parmi les nombres qui viennent d'être désignés par φ ; l'intégralité de tous les nombres premiers de la première espèce dans (II) a également la puissance de (II).

Les nombres premiers de la seconde espèce ont une propriété qui leur donne un caractère tout à fait particulier ; si η est un tel nombre premier (de la seconde espèce), alors on a toujours $\eta\alpha = \eta$ si α est un nombre quelconque inférieur à η ; de là il suit que si α et β sont deux nombres quelconques, tous deux inférieurs à η, alors le produit $\alpha\beta$ est toujours aussi inférieur à η.

Si nous nous restreignons ici pour l'heure aux nombres de la deuxième classe de nombres qui ont la forme φ, on trouve pour ceux-ci les règles d'addition et de multiplication suivantes. Soit :

$$\varphi = \nu_0\omega^{\mu} + \nu_1\omega^{\mu-1} + \cdots + \nu_{\mu}$$

$$\psi = \varrho_0\omega^{\lambda} + \varrho_1\omega^{\lambda-1} + \cdots + \varrho_{\lambda},$$

où nous supposons que ν_0 et ϱ_0 sont différents de zéro.

Addition.

1) Si $\mu < \lambda$, alors on a :

$$\varphi + \psi = \psi$$

[↔] Il s'agit plus probablement du § 3.

2) Si $\mu > \lambda$, alors on a :

$$\varphi + \psi = \nu_0\omega^\mu + \cdots + \nu_{\mu-\lambda-1}\omega^{\lambda+1} + (\nu_{\mu-\lambda} + \varrho_0)\omega^\lambda + \varrho_1\omega^{\lambda-1} + \varrho_2\omega^{\lambda-2} + \cdots + \varrho_\lambda$$

3) Pour $\mu = \lambda$, on a :

$$\varphi + \psi = (\nu_0 + \varrho_0)\omega^\lambda + \varrho_1\omega^{\lambda-1} + \cdots + \varrho_\lambda$$

Multiplication.

1) Si ν_μ est différent de zéro, alors on a :

$$\varphi\psi = \nu_0\omega^{\mu+\lambda} + \nu_1\omega^{\mu+\lambda-1} + \cdots + \nu_{\mu-1}\omega^{\lambda+1} + \nu_\mu\varrho_0\omega^\lambda + \varrho_1\omega^{\lambda-1} + \cdots + \varrho_\lambda$$

Dans le cas où $\lambda = 0$, le dernier maillon à droite est : $\nu_\mu\varrho_0$.

2) Si $\nu_\mu = 0$, alors on a :

$$\varphi\psi = \nu_0\omega^{\mu+\lambda} + \nu_1\omega^{\mu+\lambda-1} + \cdots + \nu_{\mu-1}\omega^{\lambda+1} = \varphi\omega^\lambda.$$

La décomposition d'un nombre φ en ses facteurs premiers est la suivante. On a :

$$\varphi = c_0\omega^\mu + c_1\omega^{\mu_1} + c_2\omega^{\mu_2} + \cdots + c_\sigma\omega^{\mu_\sigma}$$

où

$$\mu > \mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_\sigma$$

et

$$c_0, c_1, \ldots c_\sigma$$

sont des nombres finis positifs différents de zéro, alors :

$$\varphi = c_0(\omega^{\mu-\mu_1} + 1)c_1(\omega^{\mu_1-\mu_2} + 1)c_2 \ldots c_{\sigma-1}(\omega^{\mu_{\sigma-1}-\mu_\sigma} + 1)c_\sigma\omega^{\mu_\sigma};$$

Si l'on pense encore $c_0, c_1, \ldots c_{\sigma-1}c_\sigma$ décomposés en facteurs premiers selon les règles de la première classe de nombres, on a alors la décomposition de φ en facteurs premiers ; car les facteurs $\omega^x + 1$, et ω sont eux-mêmes des nombres premiers, comme on l'a remarqué plus haut. Cette décomposition de nombres de la forme φ est déterminée de manière unique, y compris en ce qui concerne l'ordre des facteurs, si l'on fait abstraction de la commutabilité des facteurs premiers à l'intérieur de chaque c et si l'on détermine que le dernier facteur doit être une puissance de ω ou égale à l'unité et que ω ne peut être facteur qu'en dernière position. J'écrirai à une occasion ultérieure sur la généralisation de cette décomposition en facteurs premiers à des nombres quelconques α de la deuxième classe de nombres (II).

Notes.

À propos du § 1.

1) Théorie des multiplicités. Par cette expression, je désigne un concept théorique beaucoup plus vaste, que je n'ai tenté jusqu'à présent de développer que dans la forme spécifique d'une théorie arithmétique ou géométrique des ensembles. J'entends en effet par multiplicité ou ensemble, d'une manière générale, toute multitude qui peut être conçue comme une, c'est-à-dire toute collection d'éléments déterminés qui peuvent être reliés en un tout par une loi, et je crois définir par là quelque chose qui est apparenté au *εἶδος* ou *ἰδέα* de Platon, ainsi qu'à ce que Platon appelle *μικτόν* dans son dialogue « Philèbe ou le souverain bien ». Il l'attribue aussi bien à *ἄπειρον*, c'est-à-dire à l'illimité, à l'indéterminé, que j'appelle l'infini-inauthentique, qu'à *πέρας*, c'est-à-dire à la limite, et l'explique comme un « mélange » structuré de ces deux derniers. Que ces concepts soient d'origine pythagoricienne, Platon lui-même le laisse entendre ; on peut se référer à A. Boeckh, *Philolaos des Pythagoreers Lehren*, Berlin 1819.

À propos du § 4.

2) *Aristote*. On peut se référer à la présentation de Zeller dans son grand ouvrage : « *Die Philosophie der Griechen* », IIIe édition, IIe partie, 2e section, pp. 393 à 403. La conception par Platon de l'infini est tout à fait différente de celle d'Aristote ; on peut se référer en effet à Zeller IIe partie, 1e section, pp. 628-646. De même, je trouve des points de convergence avec ma propre conception dans la philosophie de Nicolaus Cusanus. Voir : R. Zimmermann, *der Cardinal Nicolaus von Cusa als Vorgänger Leibnizens*↔ (comptes-rendus de l'Académie des sciences de Vienne, millésime 1852). Je fais la même remarque en relation avec de Giordano Bruno, le successeur du Cusain. Voir Brunnhofer, *Giordano Bruno's Weltanschauung und Verhängniss*, Leipzig 1882.

Mais une différence essentielle réside dans le fait que je fixe une fois pour toutes le concept des divers degrés de l'infini-authentique par les classes de nombres (I), (II), (III), etc. et que je considère maintenant comme un objectif d'examiner mathématiquement les relations des nombres au-delà du fini, mais aussi de les démontrer et de les poursuivre partout où elles se présentent dans la nature. Il ne fait aucun doute pour moi que nous irons toujours plus loin sur ce chemin, que nous n'atteindrons jamais une limite infranchissable, mais que nous ne parviendrons pas non plus à une saisie même approximative de l'Absolu. L'Absolu ne peut être que reconnu [anerkannt], mais jamais connu [erkannt], même approximativement. Car, de même qu'à l'intérieur de la première classe de nombres (I), on a toujours devant soi, pour chaque nombre fini, si grand soit-il, la même puissance des nombres finis plus grands que lui, de même chaque nombre au-delà du fini, si grand soit-il, de l'une quelconque des classes de nombres supérieures (II) ou (III), etc. est suivi par une collection de nombres et de classes de nombres qui n'a pas le moins du monde perdu en puissance par rapport à la collection des nombres absolue infinie commençant à 1. C'est un peu comme ce que dit Albrecht von Haller à propos de l'éternité : « je le retire [l'immense nombre] et tu [l'éternité] reste entièrement devant moi. » La suite des nombres, absolue infinie, me semble donc, dans un certain sens, un Symbole approprié de l'Absolu ; alors que l'infinitude de la première classe de nombres (I), qui

↔ Nous trouvons l'ouvrage sous ce titre : *Der Cardinal Nikolaus Cusanus als Vorläufer Leibnitzens* n'a jusqu'à présent servi qu'à cet effet, me semble, précisément parce que je le tiens pour une idée tangible (et non une simple notion), comme un rien qui disparaît complètement en comparaison de celui-ci. Ce qui me paraît également remarquable, c'est que chacune des classes de nombres, donc aussi chacune des puissances, est associée à un nombre entièrement déterminé de la collection absolue des nombres infinis, et cela de telle sorte qu'il existe aussi pour chaque nombre γ au-delà du fini une puissance qu'il doit être appelée la $\gamma^{\text{ème}}$; les différentes puissances forment donc également une suite absolue infinie. Ceci est d'autant plus remarquable que le nombre γ qui indique l'ordre d'une puissance (si le nombre γ en a un qui le précède immédiatement) est dans un rapport de grandeur avec les nombres de la classe de nombres qui a cette puissance dont la petitesse défie toute description, et ceci d'autant plus que γ est supposé plus grand.

À propos du § 5.

3) *determinari possunt*. Je ne peux pas attribuer d'être à l'indéterminé, au variable, à l'infini-inauthentique, quelle que soit la forme sous laquelle ils apparaissent, car ils ne sont rien d'autre que des concepts relationnels, ou bien des notions ou des visions (imaginationes) purement subjectives, en aucun cas des idées adéquates. Si donc seul l'infini-inauthentique était visé dans la règle « infinitum actu non datur », je pourrais y souscrire, mais ce serait alors une proposition purement tautologique. Mais le sens de cette règle me semble plutôt être, selon les sources désignées, qu'elle doit exprimer l'impossibilité de poser conceptuellement une infinitude déterminée, et c'est dans ce sens que je la considère comme fausse.

À propos du § 7.

4) *Réalistes*. On trouve la position positiviste et réaliste sur l'infini par exemple dans : Dühring, *natürliche Dialectik*, Berlin 1865, p. 109-135 et dans v. Kirchmann, *Katechismus der Philosophie* pp. 124 à 130. Se référer également aux commentaires d'Ueberweg sur le traité de Berkeley, *Abhandl. über d. Princ. der menschlichen Erkenntniss*↔ dans la bibliothèque philosophique de v. Kirchmann, et je ne peux que répéter que, dans mon appréciation de l'infini-inauthentique, je suis essentiellement d'accord avec tous ces auteurs; le point de divergence réside seulement dans le fait qu'ils considèrent cet infini syncatégorématique comme le seul infini saisissable par des « expressions » ou par des concepts, et même ici par de simples concepts relationnels. Les preuves de Dühring contre l'infini-authentique pourraient être menées en beaucoup moins de mots et me semblent mener soit au fait que le nombre fini déterminé, même s'il est conçu aussi grand que possible, ne peut jamais être un infini, ce qui suit directement de son concept, soit au fait que le nombre fini variable, de grandeur sans restriction, ne peut pas être conçu avec le prédicat de la certitude, et donc pas non plus avec le prédicat de l'être, ce qui découle à son tour directement de la nature de la variabilité. Il ne fait aucun doute pour moi que cela ne s'oppose pas le moins du monde à la concevabilité de nombres déterminés au-delà du fini ; et pourtant, ces preuves sont considérées comme des preuves contre la Réalité des nombres au-delà du fini. Il me semble que cette argumentation ressemble à celle qui consisterait à conclure qu'il ne peut pas y avoir de rouges parce qu'il existe d'innombrables intensités de vert. Il est cependant étrange que Dühring lui-même admette, à la p. 126 de son ouvrage, que pour expliquer la « possibilité d'une Synthèse

↔ *Principes de la connaissance humaine* du philosophe irlandais George Berkeley.

sans restriction », il doit y avoir une raison qu'il qualifie de « manière compréhensible totalement inconnue ». Il y a là, me semble-t-il, une contradiction.

Mais il se trouve aussi que des penseurs proches de l'idéalisme ou même qui lui rendent pleinement hommage refusent toute justification aux nombres infinis-déterminés.

Chr. Sigwart dans son excellent ouvrage : *Logik*, II, Vol. *Die Methodenlehre* (Tübingen 1878) argumente tout à fait comme Dühring et dit p. 47 : « un nombre infini est une Contradictio in adjecto ».

On trouve quelque chose de semblable chez Kant et J. F. Fries ; on peut se référer à ce dernier : *System der Metaphysik* (Heidelberg 1824) aux § 51 et § 52. Même les philosophes de l'école hégélienne n'admettent pas les nombres infinis-authentiques ; je ne mentionne que l'œuvre méritoire de K. Fischer, son *System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre*, 2ème édition (Heidelberg 1865) p. 275.

À propos du § 8.

5) Ce que j'appelle ici Réalité intrasubjective ou immanente des concepts ou des idées devrait s'accorder avec la détermination « adéquate » [adäquat] dans le sens où ce mot est utilisé par Spinoza, lorsqu'il dit : *Éthique*, partie II, définition IV, « Per ideam adaequatam intelligo ideam, quae, quatenus in se sine relatione ad objectum consideratur, omnes verae ideae proprietates sive denominationes intrinsecas habet. » ↔[1]

6) Cette conviction s'accorde pour l'essentiel avec les préceptes du système platonicien ainsi qu'avec un trait essentiel du système de Spinoza ; sur le premier point, je fais référence à Zeller, *Philos. d. Griechen*, IIIe édition, IIe partie, 1e section, pp. 541 à 602. Il est dit dès le début de la section : « Seule la connaissance conceptuelle (selon Platon) devrait fournir la vraie connaissance. Mais autant nos notions ont de vérité – Platon partage cette prémisse avec d'autres (Parménide) – autant leur objet doit avoir de réalité, et vice versa. Ce qui peut être connu est, ce qui ne peut pas être connu n'est pas, et dans la même mesure où une chose existe, elle est également connaissable. »

Concernant Spinoza, il me suffit de rappeler sa règle dans *Éthique*, partie II, prop. VII : « ordo et connexio idearum idem est ac ordo et connexio rerum. » ↔[2]

Le même principe épistémologique peut être attesté dans la philosophie de Leibniz. Ce n'est que depuis l'empirisme, le sensualisme et le scepticisme récents, ainsi que le criticisme kantien qui en est issu, que l'on croit devoir transférer la source du savoir et de la certitude dans les sens, ou du moins dans ce que l'on appelle les formes dites pures de la vision, et la restreindre à celles-ci ; j'ai la conviction que ces éléments ne fournissent assurément pas une connaissance sûre, parce que cette dernière ne peut être obtenue que par des concepts et des idées qui sont tout au plus stimulés par l'expérience extérieure, mais qui, pour l'essentiel, sont constitués par l'induction et la déduction intérieures, comme quelque chose qui était déjà en quelque sorte en nous et qui est seulement éveillé et amené à la conscience.

↔[1] « Par idée adéquate, j'entends une idée, qui en tant qu'elle est considérée en soi, sans relation à un objet, a toutes les propriétés ou dénominations intrinsèques d'une idée vraie. »

↔[2] « L'ordre et la connexion des idées sont les mêmes que l'ordre et la connexion des choses. »

À propos du § 8,7 et du § 9,8.

Le processus de formation correcte des concepts est à mon avis partout le même ; on pose une chose sans propriété, qui n'est d'abord rien d'autre qu'un nom ou un signe A, et on lui attribue de nombreux prédicats intelligibles différents, voire une infinité, dont la signification est connue par des idées déjà existantes et qui ne doivent pas se contredire, ce qui permet de déterminer les relations de A avec les concepts déjà existants et notamment avec ceux qui sont apparentés ; Si l'on a complètement terminé, toutes les conditions pour éveiller le concept A, qui sommeille en nous, sont réunies et il entre en existence, doté de la Réalité intrasubjective qui ne peut être partout qu'exigée des concepts ; il appartient alors à la métaphysique de constater sa signification transcendante.

À propos du § 10.

9) Thomas d'Aquin, *Opuscules*, XLII *de natura generis*, chapitres 19 et 20 ; LII *de natura loci* ; XXXII *de natura materiae et de dimensionibus interminatis*. On peut se référer à : C. Jourdin, *la Philosophie de Saint Thomas d'Aquin*, pp. 303-329 ; K. Werner, *der heilige Thomas von Aquino* (Regensburg 1859), 2e Vol. p. 177-201.

10) Même la collection de toutes les fonctions continues, mais aussi celui de toutes les fonctions intégrables d'une ou plusieurs variables, ne devrait avoir que la puissance de la deuxième classe de nombres (II) ; mais si l'on abandonne toutes les restrictions et que l'on considère la collection de toutes les fonctions continues et discontinues d'une ou plusieurs variables, cet ensemble a la puissance de la troisième classe de nombres (III)

11) On peut démontrer la règle selon laquelle les ensembles parfaits n'ont jamais la puissance de (I).

Comme exemple d'un ensemble-de-points parfait, qui n'est partout dense dans aucun intervalle, aussi petit soit-il, je mentionne la collection de tous les nombres réels qui sont inclus dans la formule :

$$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \cdots + \frac{c_\nu}{3^\nu} + \cdots$$

où les coefficients c_ν peuvent prendre à volonté les deux valeurs 0 et 2, et où la série peut consister aussi bien en une quantité finie qu'infinie de maillons.

12) On notera que cette définition d'un continuum est dépourvue de toute référence à ce que l'on appelle la dimension d'une structure continue ; en effet, la définition englobe également les continuums qui consistent en morceaux connexes de différentes dimensions, tels que des lignes, des surfaces, des corps, etc. A une prochaine occasion, je montrerai comment on peut passer de manière ordonnée de ce continuum général à des continuums plus spécifiques de dimension déterminée. Je sais très bien que le mot « *continuum* » n'a *pas encore* pris une signification *fixe* en mathématiques ; certains jugeront donc ma définition trop *étroite*, d'autres trop *large* ; J'espère avoir réussi à trouver le *juste milieu*.

Selon ma propre conception, un *continuum* ne peut être compris que comme une structure *parfaite* et *connexe*. Ainsi, par exemple, une ligne droite dont l'une ou les deux extrémités sont absentes, de même qu'une surface circulaire dont la frontière est exclue, ne sont pas des continuums *complets* ; je qualifie de tels ensembles-de-points de *semi-continuums*.

En général, j'entends par *semi-continuum* un ensemble-de-points *imparfait*, *connexe* et appartenant à la deuxième classe, qui est tel que deux points de cet ensemble peuvent être reliés par un continuum *complet*, qui est une partie intégrante de l'ensemble-de-points. Ainsi, par exemple, l'espace que j'ai désigné par $\mathfrak{A}$ dans le Vol. XX, p. 119 des Math. Annalen, et qui résulte de G_n par l'enlèvement d'un ensemble-de-points quelconque de *première* puissance, est un *semi-continuum*.

La *dérivée* d'un ensemble-de-points connexe est *toujours* un *continuum*, peu importe que l'ensemble-de-points connexe ait la *première* ou la *deuxième* puissance.

Si un ensemble-de-points connexe est de la *première* puissance, je ne peux le qualifier *ni* de continuum *ni* de semi-continuum.

Au moyen des concepts que j'ai placés à la tête de la théorie des multiplicités, je me propose d'explorer dans toutes leurs possibilités toutes les structures de la géométrie algébrique et transcendante, dont la généralité et l'acuité des résultats ne devraient être surpassées par aucune autre méthode.