GRUNDLAGEN

EINER

ALLGEMEINEN MANNICHFALTIGKEITSLEHRE.

EIN

MATHEMATISCH-PHILOSOPHISCHER VERSUCH

IN DER

LEHRE DES UNENDLICHEN.

VON

DR. GEORG CANTOR

ORDENTLICHER PROFESSOR A. D. UNIVERSITÄT HALLE-WITTENBERG

LEIPZIG,

COMMISSIONS-VERLAG VON B. G. TEUBNER.

188

Vorwort.

Die vorliegende Abhandlung wird nächstens in den mathematischen Annalen als fünfte Nummer eines Aufsatzes erscheinen, welcher den Titel „Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten“ führt und dessen erste vier Nummern in den Bänden: XV, XVII, XX und XXI derselben Zeitschrift enthalten sind. Es stehen alle diese Arbeiten in Zusammenhang mit zwei Aufsätzen, welche ich in den Bänden: LXXVII und LXXXIV des Borchardt'schen Journals veröffentlicht habe, in denen sich die Hauptgesichtspunkte, welche mich in der Mannichfaltigkeitslehre leiten, ihren Anfängen nach bereits vorfinden. Da nun der gegenwärtige Aufsatz den Gegenstand in manchen Beziehungen viel weiter führt und dabei der Hauptsache nach unabhängig von den früheren Aufsätzen ist, so habe ich mich entschlossen, ihn als besondere Schrift erscheinen zu lassen und mit einem seinem Inhalte entsprechenderen Titel zu versehen.

Indem ich diese Blätter der Oeffentlichkeit übergebe, will ich nicht unerwähnt lassen, dass ich sie hauptsächlich im Hinblick auf zwei Leserkreise geschrieben habe, für Philosophen, welche der Entwickelung der Mathematik bis in die neueste Zeit gefolgt und für Mathematiker, die mit den wichtigsten älteren und neueren Erscheinungen der Philosophie vertraut sind.

Ich weiss sehr wohl, dass das von mir behandelte Thema zu allen Zeiten den verschiedensten Meinungen und Auffassungen begegnet ist und dass weder Mathematiker noch Philosophen darin zu einer allseitigen Einigung gelangt sind. Es liegt mir daher sehr fern zu glauben, dass ich in einer so schwierigen, verwickelten und vielumfassenden Materie, wie sie das Unendliche darbietet, das letzte Wort zu sprechen in der Lage sei; da ich aber in diesem Gegenstand durch langjährige Forschung zu bestimmten Ueberzeugungen gelangt bin und dieselben im weiteren Verlaufe meiner Studien nicht wankend, sondern nur fester geworden sind, so glaubte ich eine gewisse Verpflichtung zu haben, sie zu ordnen und bekannt zu machen.

Möchte es mir hierbei gelungen sein die objective Wahrheit, um welche ich mich bemüht habe, zu finden und auszudrücken.

Halle, Weihnachten 1882.

Der Verfasser.

§ 1.

Die bisherige Darstellung meiner Untersuchungen in der Mannichfaltigkeitslehre[1] ist an einen Punkt gelangt, wo ihre Fortführung von einer Erweiterung des realen ganzen Zahlbegriffs über die bisherigen Grenzen hinaus abhängig wird, und zwar fällt diese Erweiterung in eine Richtung, in welcher sie meines Wissens bisher von Niemandem gesucht worden ist.

Die Abhängigkeit, in welche ich mich von dieser Ausdehnung des Zahlbegriffs versetzt sehe, ist eine so grosse, dass es mir ohne letztere kaum möglich sein würde, zwanglos den kleinsten Schritt weiter vorwärts in der Mengenlehre auszuführen; möge in diesem Umstande eine Rechtfertigung oder, wenn nöthig, eine Entschuldigung dafür gefunden werden, dass ich scheinbar fremdartige Ideen in meine Betrachtungen einführe. Denn es handelt sich um eine Erweiterung resp. Fortsetzung der realen ganzen Zahlenreihe über das Unendliche hinaus; so gewagt dies auch scheinen möchte, kann ich dennoch nicht nur die Hoffnung, sondern die feste Ueberzeugung aussprechen, dass diese Erweiterung mit der Zeit als eine durchaus einfache, angemessene, natürliche wird angesehen werden müssen. Dabei verhehle ich mir keineswegs, dass ich mit diesem Unternehmen in einen gewissen Gegensatz zu weitverbreiteten Anschauungen über das mathematische Unendliche und zu häufig vertretenen Ansichten über das Wesen der Zahlgrösse mich stelle.

Was das mathematische Unendliche anbetrifft, soweit es eine berechtigte Verwendung in der Wissenschaft bisher gefunden und zum Nutzen derselben beigetragen hat, so scheint mir dasselbe in erster Linie in der Bedeutung einer veränderlichen, entweder über alle Grenzen hinaus wachsenden oder bis zu beliebiger Kleinheit abnehmenden, aber stets endlich bleibenden Grösse aufzutreten. Ich nenne dieses Unendliche das Uneigentlich-unendliche.

Daneben hat sich aber in der neueren und neuesten Zeit sowohl in der Geometrie wie auch namentlich in der Functionentheorie eine andere ebenso berechtigte Art von Unendlichkeitsbegriffen herausgebildet, wonach beispielsweise bei der Untersuchung einer analytischen Function einer complexen veränderlichen Grösse es nothwendig und allgemein üblich geworden ist, sich in der die complexe Variable repräsentirenden Ebene einen einzigen im Unendlichen liegenden, d. h. unendlich entfernten aber bestimmten Punkt zu denken und das Verhalten der Function in der Nähe dieses Punktes ebenso zu prüfen, wie dasjenige in der Nähe irgend eines anderen Punktes; dabei zeigt es sich, dass das Verhalten der Function in der Nähe des unendlich fernen Punktes genau dieselben Vorkommnisse darbietet, wie an jedem andern, im Endlichen gelegenen Punkte, so dass hieraus die volle Berechtigung dafür gefolgert wird, das Unendliche in diesem Falle in einen ganz bestimmten Punkt verlegt zu denken.

Wenn das Unendliche in solch einer bestimmten Form auftritt, so nenne ich es Eigentlich-Unendliches.

Diese beiden Erscheinungsarten, in welchen das mathematische Unendliche hervorgetreten ist, wobei es in beiden Formen die grössten Fortschritte in der Geometrie, in der Analysis und in der mathematischen Physik bewirkt hat, halten wir zum Verständniss des Folgenden wohl auseinander.

In der ersteren Form, als Uneigentlich-Unendliches, stellt es sich als ein veränderliches Endliche dar; in der andern Form, wo ich es Eigentlich-Unendliches nenne, tritt es als ein durchaus bestimmtes Unendliche auf. Die unendlichen realen ganzen Zahlen, welche ich im Folgenden definiren will und zu denen ich schon vor einer längeren Reihe von Jahren geführt worden bin, ohne dass es mir zum deutlichen Bewusstsein gekommen war, in ihnen concrete Zahlen von realer Bedeutung zu besitzen*, haben durchaus nichts gemein mit der ersten von jenen beiden Formen, mit dem Uneigentlich-Unendlichen, dagegen ist ihnen derselbe Charakter der Bestimmtheit eigen, wie wir ihn bei dem unendlich fernen Punkte in der analytischen Functionentheorie antreffen; sie gehören also zu den Formen und Affectionen des Eigentlich-Unendlichen. Während aber der Punkt im Unendlichen der complexen Zahlenebene vereinzelt dasteht gegenüber allen im Endlichen liegenden Punkten, erhalten wir nicht blos eine einzige unendliche ganze Zahl, sondern eine unendliche Folge von solchen, die von einander wohl unterschieden sind und in gesetzmässigen zahlentheoretischen Beziehungen zu einander sowohl wie zu den endlichen ganzen Zahlen stehen. Diese Beziehungen sind nicht etwa solche, welche sich im Grunde auf Beziehungen endlicher Zahlen unter einander zurückführen lassen; die letztere Erscheinung tritt allerdings, aber auch nur bei den verschiedenen Stärken und Formen des Uneigentlich-Unendlichen häufig auf, z. B. bei unendlich klein- oder unendlich grosswerdenden Functionen einer Veränderlichen x, falls sie bestimmte endliche Ordnungszahlen des Unendlich-werdens haben. Solche Beziehungen können in der That nur als verschleierte Verhältnisse des Endlichen oder doch als auf letztere unmittelbar zurückführbar angesehen werden; die Gesetze unter den zu definirenden eigentlich-unendlichen ganzen Zahlen sind dagegen von Grund aus verschieden von den im Endlichen herrschenden Abhängigkeiten, womit aber nicht ausgeschlossen ist, dass die endlichen reellen Zahlen selbst gewisse neue Bestimmungen mit Hülfe der bestimmt-unendlichen Zahlen erfahren können.

Die *beiden Erzeugungsprincipe*, mit deren Hülfe, wie sich zeigen wird, die neuen bestimmt unendlichen Zahlen definirt werden, sind solcher Art, dass durch ihre vereinigte Wirkung jede Schranke in der Begriffsbildung realer ganzer Zahlen durchbrochen werden kann; glücklicherweise stellt sich ihnen aber, wie wir sehen werden, ein *drittes* Princip, welches ich das *Hemmungs*- oder *Beschränkungsprincip* nenne, entgegen, wodurch dem durchaus endlosen Bildungsprocess successive gewisse Schranken auferlegt werden, sodass wir natürliche Abschnitte in der absolut

* Ich nannte sie bisher „bestimmt definirte Unendlichkeitssymbole“ m. v. math. Ann. Bd. XVII, pag. 357, Bd. XX, pag. 113, Bd. XXI, pag. 54.

unendlichen Folge der realen ganzen Zahlen erhalten, welche Abschnitte ich *Zahlenclassen* nenne.

Die *erste* Zahlenclasse (I) ist die Menge der endlichen ganzen Zahlen $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$, auf sie folgt die *zweite* Zahlenclasse (II), bestehend aus gewissen in bestimmter Succession einander folgenden unendlichen ganzen Zahlen; erst nachdem die zweite Zahlenclasse definirt ist, kommt man zur dritten, dann zur vierten u. s. w.

Von der grössten Bedeutung scheint mir zunächst die Einführung der neuen ganzen Zahlen für die Entwickelung und Verschärfung des in meinen Arbeiten (Borchardts J. Bd. 77, pag. 257; Bd. 84, pag. 242) eingeführten und in den früheren Nummern dieses Aufsatzes vielfach verwandten Mächtigkeitsbegriffes. Jeder wohldefinirten Menge kommt darnach eine bestimmte Mächtigkeit zu, wobei zweien Mengen dieselbe Mächtigkeit zugeschrieben wird, wenn sie sich gegenseitig eindeutig, Element für Element, einander zuordnen lassen.

Bei endlichen Mengen fällt die Mächtigkeit mit der *Anzahl* der Elemente zusammen, weil solche Mengen in jeder Anordnung bekanntlich dieselbe Anzahl von Elementen haben.

Bei unendlichen Mengen hingegen war bisher überhaupt weder in meinen Arbeiten noch sonst wo von einer präcis definirten *Anzahl* ihrer Elemente die Rede, wohl aber konnte auch ihnen eine bestimmte, von ihrer Anordnung völlig unabhängige *Mächtigkeit* zugeschrieben werden.

Die kleinste Mächtigkeit unendlicher Mengen musste, wie leicht zu rechtfertigen war, denjenigen Mengen zugeschrieben werden, welche sich gegenseitig eindeutig der ersten Zahlenclasse zuordnen lassen und daher mit ihr gleiche Mächtigkeit haben. Dagegen fehlte es bisher an einer ebenso einfachen, natürlichen Definition der höheren Mächtigkeiten.

Unsere oben erwähnten Zahlenclassen der bestimmt-unendlichen realen ganzen Zahlen weisen sich nun als die natürlichen, in einheitlicher Form sich darbietenden Repräsentanten der in gesetzmässiger Folge aufsteigenden Mächtigkeiten von wohldefinirten Mengen aus. Ich zeige aufs Bestimmteste, dass die Mächtigkeit der zweiten Zahlenclasse (II) nicht nur verschieden ist von der Mächtigkeit der ersten Zahlenclasse, sondern dass sie auch thatsächlich die nächst höhere Mächtigkeit ist; wir können sie daher die zweite Mächtigkeit oder die Mächtigkeit zweiter Classe nennen. Ebenso ergiebt die dritte Zahlenclasse die Definition der dritten Mächtigkeit oder der Mächtigkeit dritter Classe u. s. w. u. s. w.

§ 2.

Ein anderer grosser, den neuen Zahlen zuzuschreibender Gewinn besteht für mich in einem *neuen*, bisher noch nicht vorgekommenen Begriffe, in dem Begriffe der *Anzahl* der Elemente einer *wohlgeordneten* unendlichen Mannichfaltigkeit; da dieser Begriff immer durch eine ganz bestimmte Zahl unseres erweiterten Zahlengebietes ausgedrückt wird, wofern nur die sogleich näher zu definirende Ordnung der Elemente der Menge bestimmt ist und da andererseits der Anzahlbegriff in unserer inneren Anschauung eine unmittelbare gegenständliche Repräsentation erhält, so ist durch diesen Zusammenhang zwischen Anzahl und Zahl die von mir betonte Realität der letzteren auch in den Fällen, dass sie bestimmt-unendlich ist, erwiesen.

Unter einer *wohlgeordneten* Menge ist jede wohldefinirte Menge zu verstehen, bei welcher die Elemente durch eine bestimmt vorgegebene Succession mit einander verbunden sind, welcher gemäss es ein *erstes* Element der Menge giebt und sowohl auf jedes einzelne Element (falls es nicht das letzte in der Succession ist) ein bestimmtes anderes folgt, wie auch zu jeder beliebigen endlichen oder unendlichen Menge von Elementen ein bestimmtes Element gehört, welches das ihnen allen *nächst* folgende Element in der Succession ist (es sei denn, dass es ein ihnen allen in der Succession folgendes überhaupt nicht giebt). Zwei „wohlgeordnete" Mengen werden nun von derselben *Anzahl* (mit Bezug auf die für sie vorgegebenen Successionen) genannt, wenn eine gegenseitig eindeutige Zuordnung derselben derart möglich ist, dass, wenn E und F irgend zwei Elemente der einen, E_1 und F_1, die entsprechenden Elemente der anderen sind, immer die Stellung von E und F in der Succession der ersten Menge in Uebereinstimmung ist mit der Stellung von E_1 und F_1 in der Succession der zweiten Menge, so dass, wenn E dem F vorangeht in der Succession der ersten Menge, alsdann auch E_1 dem F_1 vorangeht in der Succession der zweiten Menge. Diese Zuordnung ist, wenn sie überhaupt möglich, wie man leicht sieht, immer eine durchaus bestimmte und da sich in der erweiterten Zahlenreihe stets eine und nur eine Zahl α findet, so dass die ihr *vorangehenden* Zahlen (von 1 an) in der natürlichen Succession dieselbe Anzahl haben, so wird man genöthigt, die Anzahl jener beiden „wohlgeordneten" Mengen geradezu gleich α zu setzen, wenn α eine unendlich grosse Zahl ist, und gleich der der Zahl α nächstvorangehenden Zahl $\alpha - 1$, wenn α eine endliche ganze Zahl ist.

Der wesentliche Unterschied zwischen den endlichen und unendlichen Mengen zeigt sich nun darin, dass eine endliche Menge in jeder Succession, welche man ihren Elementen geben kann, dieselbe Anzahl von Elementen darbietet; dagegen werden einer aus unendlich vielen Elementen bestehenden Menge im Allgemeinen verschiedene Anzahlen zukommen, je nach der Succession, welche man den Elementen giebt. Die *Mächtigkeit* einer Menge ist, wie wir gesehen, ein von der Anordnung unabhängiges Attribut derselben; die *Anzahl* der Menge weist sich aber als ein von einer gegebenen Succession der Elemente im Allgemeinen abhängiger Factor aus, sobald man es mit unendlichen Mengen zu thun hat. Indessen besteht dennoch auch bei den unendlichen Mengen ein gewisser Zusammenhang zwischen der *Mächtigkeit* der Menge und der bei gegebener Succession bestimmten *Anzahl* ihrer Elemente.

Nehmen wir zuerst eine Menge, welche die Mächtigkeit der ersten Classe hat und geben den Elementen *irgend* eine bestimmte Succession, so dass sie zu einer „wohlgeordneten" Menge wird, so ist ihre Anzahl immer eine bestimmte Zahl der *zweiten* Zahlenclasse und kann niemals durch eine Zahl einer anderen, als der zweiten, Zahlenclasse bestimmt werden. Andrerseits lässt sich jede Menge von der ersten Mächtigkeit in eine solche Succession ordnen, dass ihre Anzahl, mit Bezug auf diese Succession, gleich einer beliebig vorgezeichneten Zahl der zweiten Zahlenclasse wird. Wir können diese Sätze auch folgendermaassen ausdrücken: jede Menge von der Mächtigkeit *erster* Classe ist *abzählbar durch* Zahlen der *zweiten* Zahlenclasse und nur *durch* solche, und zwar kann der Menge stets eine solche Succession ihrer Elemente gegeben werden, dass sie in dieser Succession *durch* eine beliebig vorgegebene Zahl der zweiten Zahlenclasse abgezählt wird, welche Zahl die Anzahl der Elemente der Menge mit Bezug auf jene Succession angiebt.

Die analogen Gesetze gelten für die Mengen höherer Mächtigkeiten. So ist jede wohldefinirte Menge von der Mächtigkeit *zweiter* Classe abzählbar *durch* Zahlen der *dritten* Zahlenclasse und nur *durch* solche, und zwar kann der Menge stets eine solche Succession ihrer Elemente gegeben werden, dass sie in dieser Succession *durch* eine *beliebig vorgegebene* Zahl der *dritten* Zahlenclasse abgezählt[*] wird, welche Zahl die Anzahl der Elemente der Menge mit Bezug auf jene Succession bestimmt.

§ 3.

Der Begriff der *wohlgeordneten Menge* weist sich als fundamental für die ganze Mannichfaltigkeitslehre aus. Dass es immer möglich ist, jede *wohldefinirte* Menge in die *Form* einer *wohlgeordneten* Menge zu bringen, auf dieses, wie mir scheint, grundlegende und folgenreiche, durch seine Allgemeingültigkeit besonders merkwürdige Denkgesetz werde ich in einer späteren Abhandlung zurückkommen. Hier beschränke ich mich auf den Nachweis, wie aus dem Begriffe der *wohlgeordneten* Menge die Grundoperationen für die ganzen, sei es endlichen oder bestimmt-unendlichen Zahlen, in der einfachsten Weise sich ergeben und wie die Gesetze derselben aus der unmittelbaren inneren Anschauung mit apodictischer Gewissheit erschlossen werden. Sind zunächst zwei *wohlgeordnete* Mengen M und M_1, denen als Anzahlen die Zahlen α und β entsprechen, gegeben, so ist $M + M_1$ wieder eine *wohlgeordnete* Menge, welche entsteht, wenn zuerst die Menge M und auf sie folgend die Menge M_1 gesetzt und mit jener vereiniget wird; es entspricht also auch der Menge $M + M_1$ in Bezug auf die sich ergebende Succession ihrer Elemente eine bestimmte Zahl als Anzahl; diese Zahl wird die Summe von α und β genannt und mit $\alpha + \beta$ bezeichnet; hier zeigt sich sofort, dass, wenn nicht α und β beide endlich sind, $\alpha + \beta$ im Allgemeinen von $\beta + \alpha$ verschieden ist. Das *commutative* Gesetz hört also bereits bei der Addition auf im Allgemeinen gültig zu sein. Es ist nun so einfach, den Begriff der Summe von mehreren in bestimmter Folge gegebenen Summanden, wobei diese

[*] Was ich bisher in den früheren Nummern dieses Aufsatzes „abzählbar“ genannt habe, ist nach der jetzt eingeführten, zugleich verschärften und verallgemeinerten Definition nichts anderes, als Abzählbarkeit *durch* Zahlen der ersten Classe (endliche Mengen) oder *durch* Zahlen der zweiten Classe (Mengen von der ersten Mächtigkeit).

Folge selbst eine bestimmt-unendliche sein kann, zu bilden, dass ich hier nicht näher darauf einzugehen brauche und ich bemerke daher nur, dass das *associative* Gesetz allgemein sich als gültig erweist. Man hat im Besondern: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

Nimmt man eine durch eine Zahl β bestimmte Succession von lauter gleichen und gleichgeordneten Mengen, bei welchen einzeln die Anzahl der Elemente gleich α ist, so erhält man eine neue *wohlgeordnete* Menge, deren zugehörige Anzahl die Definition für das Product $\beta\alpha$ liefert, wo β der Multiplicator, α der Multiplicandus ist; auch hier findet sich, dass $\beta\alpha$ im Allgemeinen von $\alpha\beta$ verschieden, also das commutative Gesetz auch bei der Multiplication der Zahlen im Allgemeinen ungültig ist. Dagegen findet sich das associative Gesetz auch bei der Multiplication als allgemein herrschend, so dass man hat: $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

Von den neuen Zahlen zeichnen sich gewisse vor den anderen dadurch aus, dass sie Primzahleigenschaft haben, doch muss letztere hier in etwas bestimmterer Weise charakterisirt werden, indem man unter Primzahl eine solche Zahl α versteht, für welche die Zerlegung: $\alpha = \beta\gamma$, wo β Multiplicator, nicht anders möglich ist, als wenn $\beta = 1$ oder $\beta = \alpha$; dagegen wird im Allgemeinen auch bei Primzahlen α der Multiplicandus einen gewissen Spielraum der Unbestimmtheit haben, was nach der Natur der Dinge nicht abgeändert werden kann. Nichtsdestoweniger soll in einer späteren Abhandlung gezeigt werden, dass die Zerlegung einer Zahl in ihre Primfactoren stets auf eine im Wesentlichen einzige und sogar hinsichtlich der Folge der Factoren (soweit dieselben nicht endliche im Product benachbart auftretende Primzahlen sind) bestimmte Weise erfolgen kann. Dabei stellen sich zwei Arten von bestimmt-unendlichen Primzahlen heraus, von denen die erste den endlichen Primzahlen näher steht, wogegen die Primzahlen der zweiten Art einen ganz andern Charakter haben.

Ferner wird es mir nun mit Hülfe der neuen Erkenntnisse möglich sein, demnächst eine strenge Begründung des in der Abhandlung: „Ein Beitrag zur Mannichfaltigkeitslehre“ (Borchardts J. Bd. 84, pag. 257) am Schlusse derselben angeführten Satzes über die sogenannten linearen unendlichen Mannichfaltigkeiten zu bringen.

In der letzten Nummer (4) dieses Aufsatzes (Bd. XXI, pag. 54) leitete ich für Punktmengen P, die in einem n-dimensionalen stetigen Gebiete enthalten sind, einen Satz her, der sich mit Anwendung der neuen, vorhin definirten Ausdrucksweise, wie folgt aussprechen lässt: „Ist P eine Punktmenge, deren Ableitung $P^{(\alpha)}$ identisch verschwindet, wo α eine beliebige ganze Zahl der *ersten* oder *zweiten* Zahlenclasse ist, so ist die erste Ableitung $P^{(1)}$, und daher auch P selbst, eine Punktmenge von der Mächtigkeit *erster* Classe.“ Es scheint mir höchst merkwürdig, dass sich dieser Satz wie folgt umkehren lässt: „Ist P eine Punktmenge, deren erste Ableitung $P^{(1)}$ die Mächtigkeit *erster* Classe hat, so giebt es der *ersten* oder *zweiten* Zahlenclasse angehörige ganze Zahlen α, für welche $P^{(\alpha)}$ identisch verschwindet, und es ist von den Zahlen α, für welche diese Erscheinung eintritt, eine die kleinste."

Den Beweis dieses Satzes werde ich in der nächsten Zeit, in Folge einer freundlichen Aufforderung meines hochverehrten Freundes, des Herrn Prof. Mittag-Leffler in Stockholm, in dem ersten Bande des von ihm redigirten neuen mathematischen Journals publiciren. Im Anschlusse hieran wird Herr Mittag-Leffler einen Aufsatz veröffentlichen, in welchem er zeigen wird, wie auf Grund dieses Satzes seinen und des Herrn Prof. Weierstrass Untersuchungen über die Existenz eindeutiger analytischer Functionen mit gegebenen Singularitätsstellen eine erhebliche Verallgemeinerung gegeben werden kann.

§ 4.

Die erweiterte ganze Zahlenreihe kann, wenn es die Zwecke fordern, ohne Weiteres zu einer continuirlichen Zahlenmenge vervollständiget werden, indem man zu jeder ganzen Zahl α alle reellen Zahlen x, die grösser als Null und kleiner als Eins sind, hinzufügt.

Es wird nun vielleicht hieran die Frage geknüpft werden, ob man, da doch auf diese Weise eine bestimmte Erweiterung des reellen Zahlengebietes in das Unendlichgrosse erreicht ist, nicht auch mit gleichem Erfolge bestimmte unendlich kleine Zahlen oder, was auf dasselbe hinauslaufen möchte, endliche Zahlen definiren könnte, welche mit den rationalen und irrationalen Zahlen (die als Grenzwerthe von Reihen rationaler Zahlen auftreten) nicht zusammenfallen, sondern sich an muthmaasslichen Zwischenstellen inmitten der reellen Zahlen ebenso einfügen möchten, wie die irrationalen Zahlen in die Kette der rationalen oder wie die transcendenten Zahlen in das Gefüge der algebraischen Zahlen sich einschieben?

Die Frage der Herstellung solcher Interpolationen, auf welche von einigen Autoren viel Mühe verwandt worden ist, lässt sich, meines Erachtens und wie ich zeigen werde, erst mit Hülfe unsrer neuen Zahlen und namentlich auf Grund des allgemeinen Anzahlbegriffes wohlgeordneter Mengen klar und deutlich beantworten; während die bisherigen Versuche, wie mir scheint, theils auf einer irrthümlichen Verwechslung des Uneigentlich-Unendlichen mit dem Eigentlich-Unendlichen beruhen, theils auf einer durchaus unsicheren, schwankenden Basis ausgeführt worden sind.

Das Uneigentlich-Unendliche ist oft von neueren Philosophen „schlechtes" Unendliche genannt worden, meines Erachtens mit Unrecht, da es sich in der Mathematik und in den Naturwissenschaften als ein sehr gutes, höchst brauchbares Instrument bewährt hat. Die unendlichkleinen Grössen sind, meines Wissens, bisher überhaupt nur in der Form des Uneigentlich-Unendlichen zum Nutzen ausgebildet und sind als solches aller jener Verschiedenheiten, Modificationen und Beziehungen fähig, welche in der Infinitesimalanalysis sowohl wie in der Functionentheorie gebraucht werden und zum Ausdruck kommen, um dort die reiche Fülle der analytischen Wahrheiten zu begründen. Dagegen müssten alle Versuche, dieses Unendlichkleine gewaltsam zu einem eigentlichen Unendlichkleinen zu machen als zwecklos endlich aufgegeben werden. Wenn anders überhaupt eigentlichunendlichkleine Grössen existiren, d. h. definirbar sind, so stehen sie sicherlich in keinem unmittelbaren Zusammenhange mit den gewöhnlichen, unendlich klein *werdenden* Grössen.

Im Gegensatz zu den erwähnten Versuchen über das Unendlichkleine und zu der Verwechselung der beiden Erscheinungsformen des Unendlichen findet sich eine Ansicht über das Wesen und die Bedeutung der Zahlgrössen vielfach vertreten, nach welcher keine anderen Zahlen als wirklich existirend aufgefasst werden, als die endlichen realen ganzen Zahlen unsrer Zahlenclasse (I).

Höchstens den aus ihnen unmittelbar hervorgehenden rationalen Zahlen wird eine gewisse Realität zugestanden. Was aber die Irrationalen anbetrifft, so soll denselben in der reinen Mathematik eine bloss formale Bedeutung zukommen, indem sie gewissermassen nur als Rechenmarken dazu dienen, Eigenschaften von Gruppen ganzer Zahlen zu fixiren und auf einfache, einheitliche Weise zu beschreiben. Das eigentliche Material der Analysis wird ausschliesslich, dieser Ansicht zufolge, von den endlichen, realen, ganzen Zahlen gebildet und alle in der Arithmetik und Analysis gefundenen oder noch der Entdeckung harrenden Wahrheiten sollen als Beziehungen der endlichen ganzen Zahlen untereinander aufzufassen sein; es wird die Infinitesimalanalysis und mit ihr die Functionentheorie nur insoweit für legalisirt gehalten, wie ihre Sätze sich nachweisbar als unter ganzen endlichen Zahlen herrschende Gesetze deuten lassen. Mit dieser Auffassung der reinen Mathematik, obgleich ich ihr nicht zustimmen kann, sind unstreitig gewisse Vorzüge verbunden, die ich hier hervorheben möchte; spricht doch für ihre Bedeutung auch der Umstand, dass zu ihren Vertretern ein Theil der verdienstvollsten Mathematiker der Gegenwart gehört.

Sind, wie es hier angenommen wird, nur die endlichen ganzen Zahlen wirklich, alle übrigen aber nichts Anderes als Beziehungsformen, so kann verlangt werden, dass die Beweise der analytischen Sätze nach ihrem „zahlentheoretischen Gehalte“ geprüft werden und dass man jede Lücke, die sich in ihnen zeigt, nach den Grundsätzen der Arithmetik ausfülle; in der Thunlichkeit solcher Ergänzung wird der wahre Prüfstein für die Aechtheit und vollendete Strenge der Beweise gesehen. Es ist nicht zu leugnen, dass auf diesem Wege die Begründung vieler Sätze vervollkommnet und auch sonstige methodische Verbesserungen in verschiedenen Theilen der Analysis bewirkt werden können; auch sieht man in der Befolgung der aus jener Anschauung fliessenden Grundsätze eine Sicherung vor jeder Art von Ungereimtheiten oder Fehlern.

Auf diese Weise ist ein bestimmtes, wenn auch ziemlich nüchternes und naheliegenes Princip gesetzt, das als Richtschnur Allen empfohlen wird; es soll dazu dienen, den Flug der mathematischen Speculations- und Conceptionslust in die wahren Grenzen zu weisen, wo sie keine Gefahr läuft, in den Abgrund des

„Transcendenten“ zu gerathen, dorthin, wo, wie zur Furcht und zum heilsamen Schrecken gesagt wird „Alles möglich“ sein soll. Dies dahingestellt, wer weiss, ob nicht gerade der Gesichtspunkt der Zweckmässigkeit es allein gewesen ist, welcher die Urheber der Ansicht bestimmt hat, sie den aufstrebenden, so leicht durch Uebermuth und Maasslosigkeit in Gefahr kommenden Kräften zum Schutz vor allen Irrthümern als ein wirksames Regulativ zu empfehlen, obgleich ein fruchtbares Princip darin nicht gefunden werden kann; denn die Annahme, dass sie selbst bei Auffindung neuer Wahrheiten von diesen Grundsätzen ausgegangen wären, ist für mich deshalb ausgeschlossen, weil ich, soviel gute Seiten ich diesen Maximen auch abgewinne, sie streng genommen für irrig halten muss; wir verdanken denselben keine wahren Fortschritte und wenn es wirklich genau nach ihnen zugegangen wäre, so würde die Wissenschaft zurückgehalten oder doch in die engsten Grenzen gebannt worden sein. Glücklicherweise stehen die Dinge in Wahrheit nicht so schlimm und die Anpreisung sowohl wie die Befolgung jener unter Umständen und Voraussetzungen nützlichen Regeln sind nie so ganz wörtlich genommen worden; auch hat es bis jetzt auffallenderweise, so viel mir bekannt geworden, an Jemandem gefehlt, der es unternommen hätte, sie vollständiger und besser zu formuliren, als es hier von mir versucht worden ist.

Sehen wir uns in der Geschichte um, so zeigt sich, dass ähnliche Ansichten öfter vertreten waren und schon bei Aristoteles vorkommen. Bekanntlich findet sich im Mittelalter durchgehends bei allen Scholastikern das „infinitum actu non datur“ als unumstösslicher, von Aristoteles hergenommener, Satz vertreten. Wenn man aber die Gründe betrachtet, welche Aristoteles[2)] gegen die reale Existenz des Unendlichen vorführt (m. s. z. B. seine „Metaphysik“, Buch XI, Cap. 10), so lassen sie sich der Hauptsache nach auf eine Voraussetzung zurückführen, die eine *petitio principii* involvirt, auf die Voraussetzung nämlich, dass es nur endliche Zahlen gebe, was er daraus schloss, dass ihm nur Zählungen an endlichen Mengen bekannt waren. Ich glaube aber oben bewiesen zu haben und es wird sich dies im Folgenden dieser Arbeit noch deutlicher zeigen, dass eben so bestimmte Zählungen wie an endlichen auch an unendlichen Mengen vorgenommen werden können, vorausgesetzt, dass man den Mengen ein bestimmtes Gesetz giebt, wonach sie zu *wohlgeordneten* Mengen werden. Dass ohne eine solche gesetzmässige Succession der Elemente einer Menge keine Zählung mit ihr vorgenommen werden kann – dies liegt in der Natur des Begriffes *Zählung*; auch bei endlichen Mengen kann eine Zählung nur bei einer bestimmten Aufeinanderfolge der gezählten Elemente ausgeführt werden, es zeigt sich aber hier als eine besondere Beschaffenheit endlicher Mengen, dass das Resultat der Zählung – die *Anzahl* – unabhängig ist von der jeweiligen Anordnung; während bei unendlichen Mengen, wie wir gesehen haben, eine solche Unabhängigkeit im Allgemeinen nicht zutrifft, sondern die Anzahl einer unendlichen Menge eine durch das Gesetz der Zählung *mitbestimmte* unendliche ganze Zahl ist; hierin liegt eben und hierin allein der in der Natur selbst begründete und daher niemals fortzuschaffende wesentliche Unterschied zwischen dem Endlichen und Unendlichen; nimmermehr wird aber um dieses Unterschiedes willen die Existenz des Unendlichen geläugnet, dagegen die des Endlichen aufrecht erhalten werden können; lässt man das Eine fallen, so muss man mit dem Andern auch aufräumen; wo würden wir also auf diesem Wege hinkommen?

Ein anderes von Aristoteles gegen die Wirklichkeit des Unendlichen gebrauchte Argument besteht in der Behauptung, dass das Endliche vom Unendlichen, wenn dieses existirte, aufgehoben und zerstört werden würde, weil die endliche Zahl durch eine unendliche Zahl angeblich vernichtet wird; die Sache verhält sich, wie man im Folgenden deutlich sehen wird, in Wahrheit so, dass zu einer unendlichen Zahl, wenn sie als bestimmt und vollendet gedacht wird, *sehr wohl* eine endliche hinzugefügt und mit ihr vereinigt werden kann, ohne dass hierdurch eine Aufhebung der letzteren bewirkt wird (vielmehr wird die unendliche Zahl durch eine solche Hinzufügung einer endlichen Zahl zu ihr modificirt); nur der umgekehrte Vorgang, die Hinzufügung einer unendlichen Zahl zu einer endlichen, wenn diese zuerst gesetzt wird, bewirkt die Aufhebung der letzteren, ohne dass eine Modification der ersteren eintritt. – Dieser richtige Sachverhalt hinsichtlich des Endlichen und Unendlichen, der von Aristoteles gänzlich verkannt worden ist, dürfte nicht nur in der Analysis, sondern auch in anderen Wissenschaften, namentlich in den Naturwissenschaften zu neuen Anregungen führen.

Zu dem Gedanken, das Unendlichgrosse nicht bloss in der Form des unbegrenzt Wachsenden und in der hiermit eng zusammenhängenden Form der im siebenzehnten Jahrhundert zuerst eingeführten convergenten unendlichen Reihen zu betrachten, sondern es auch in der bestimmten Form des Vollendetunendlichen mathematisch durch Zahlen zu fixiren, bin ich fast wider meinen Willen, weil im Gegensatz zu mir werthgewordenen Traditionen, durch den Verlauf vieljähriger wissenschaftlicher Bemühungen und Versuche logisch gezwungen worden und ich glaube daher auch nicht, dass Gründe sich dagegen werden geltend machen lassen, denen ich nicht zu begegnen wüsste.

§ 5.

Wenn ich soeben von Traditionen sprach, so verstand ich dieselben nicht blos im engeren Sinne des Erlebten, sondern führe sie auf die Begründer der neueren Philosophie und Naturwissenschaften zurück. Zur Beurtheilung der Frage, um die es sich hier handelt, gebe ich nur einige der wichtigsten Quellen an. Man vergleiche:

Locke, Essay o. h. u. lib. II, cap. XVI und XVII.

Descartes, Briefe und Erläuterungen zu seinen Meditationen; ferner Principia I, 26.

Spinoza, Brief XXIX; cogitata metaph. pars I und II.

Leibniz, Erdmannsche Ausg. pag. 138, 244, 436, 744; Pertzsche Ausg. II, 1 pag. 209; III, 4 pag. 218; III, 5 pag. 307, 322, 389; III, 7 pag. 273*).

Stärkere Gründe, als man sie hier gegen die Einführung unendlicher ganzer Zahlen zusammen findet, können wohl auch heute nicht ersonnen werden; man prüfe daher und vergleiche sie mit den meinigen für dieselben. Eine ausführliche und eingehende Besprechung dieser Stellen und namentlich des höchst bedeutenden, inhaltsvollen Briefes Spinozas an L. Meyer behalte ich mir für eine andere Gelegenheit vor, beschränke mich aber hier auf folgendes.

So verschieden auch die Lehren dieser Schriftsteller sind, in der Beurtheilung des Endlichen und Unendlichen stimmen sie an jenen Stellen im Wesentlichen darin überein, dass zu dem Begriffe einer Zahl die Endlichkeit derselben gehöre, und dass andrerseits das wahre Unendliche oder Absolute, welches in Gott ist, keinerlei Determination gestattet. Was den letzteren Punkt anbetrifft, so stimme ich, wie es nicht anders sein kann, demselben völlig bei, denn der Satz: „omnis determinatio est negatio" steht für mich ganz ausser Frage; dagegen sehe ich im ersteren, wie ich schon oben bei Erörterung der Aristotelischen Gründe gegen das „infinitum actu" gesagt habe, eine petitio principii, welche manche Widersprüche erklärlich macht, die sich bei allen diesen Autoren und namentlich auch bei Spinoza und Leibniz finden. Die Annahme, dass es ausser dem Absoluten durch keine Determination Erreichbaren und dem Endlichen keine Modificationen geben sollte, die, obgleich sie nicht endlich, dennoch durch Zahlen bestimmbar und folglich das sind, was ich Eigentlich-Unendliches nenne – diese Annahme finde ich durch nichts gerechtfertigt und sie steht, m. E., sogar im Widerspruch zu gewissen von den beiden letzteren Philosophen aufgestellten Sätzen. Was ich behaupte und durch diese Arbeit, wie auch durch meine früheren t bewiesen zu haben glaube, ist, dass es nach dem Endlichen ein *Transfinitum* (welches man auch *Suprafinitum* nennen könnte), d. i. eine unbegrenzte Stufenleiter von bestimmten Modis giebt, die ihrer Natur nach nicht endlich, sondern unendlich sind, welche aber ebenso wie das Endliche durch bestimmte, wohldefinirte und von einander unterscheidbare Zahlen determinirt werden können. Mit den endlichen Grössen ist daher meiner Ueberzeugung nach das Bereich der definirbaren Grössen nicht abgeschlossen und die Grenzen unseres Erkennens lassen sich entsprechend weiter ausdehnen, ohne dass es dabei nöthig wäre unsrer Natur irgend welchen Zwang anzuthun. An Stelle des in §. 4 besprochenen Aristotelisch-scholastischen Satzes, setze ich daher den andern:

Omnia seu finita seu infinita *definita* sunt et excepto Deo ab intellectu determinari possunt.3)

Man führt so oft die Endlichkeit des menschlichen Verstandes als Grund an, warum nur endliche Zahlen denkbar sind; doch sehe ich in dieser Behauptung wieder

*) Beachtenswerth ist auch: Hobbes, de corpore cap. VII, 11. Berkeley, Treatise on the princ. of hum. Knowledge, CXXVIII-CXXXII.

den erwähnten Cirkelschluss. Stillschweigend wird nämlich bei der „Endlichkeit des Verstandes“ gemeint, dass sein Vermögen rücksichtlich der Zahlenbildung auf endliche Zahlen beschränkt sei. Zeigt es sich aber, dass der Verstand auch in bestimmtem Sinne unendliche, d. i. *überendliche* Zahlen definiren und von einander unterscheiden kann, so muss entweder den Worten „endlicher Verstand“ eine erweiterte Bedeutung gegeben werden, wonach alsdann jener Schluss aus ihnen nicht mehr gezogen werden kann; oder es muss auch dem menschlichen Verstand das Prädicat „unendlich“ in gewissen Rücksichten zugestanden werden, was meines Erachtens das einzig Richtige ist. Die Worte „endlicher Verstand“, welche man so vielfach zu hören bekommt, treffen, wie ich glaube, in keiner Weise zu; so beschränkt auch die menschliche Natur in Wahrheit ist, vom Unendlichen haftet ihr doch sehr vieles an und ich meine sogar, dass wenn sie nicht in vielen Beziehungen selbst unendlich wäre, die feste Zuversicht und Gewissheit hinsichtlich des Seins des Absoluten, worin wir uns Alle einig wissen, nicht zu erklären sein würde. Und im Besondern vertrete ich die Ansicht, dass der menschliche Verstand eine unbegrenzte Anlage für die stufenweise Bildung von ganzen Zahlenclassen hat, die zu den unendlichen Modis in einer bestimmten Beziehung stehen und deren *Mächtigkeiten* von aufsteigender Stärke sind.

Die Hauptschwierigkeiten in den zwar äusserlich verschiedenartigen, innerlich aber durchaus verwandten Systemen der beiden zuletzt genannten Denker lassen sich, wie ich glaube, auf dem von mir eingeschlagenen Wege der Lösung näher bringen und selbst manche von ihnen schon jetzt befriedigend lösen und aufklären. Es sind dies Schwierigkeiten, welche zu dem späteren Kriticismus mit Veranlassung gegeben haben, der bei all seinen Vorzügen einen ausreichenden Ersatz für die gehemmte Entwickelung der Lehren Spinozas und Leibnizens mir nicht zu gewähren scheint. Denn neben oder an Stelle der mechanischen Naturerklärung, die innerhalb ihrer Sphäre alle Hülfsmittel und Vortheile mathematischer Analyse zur Verfügung hat, von welcher aber die Einseitigkeit und Unzulänglichkeit so treffend durch Kant aufgedeckt worden sind, ist bisher eine mit derselben mathematischen Strenge ausgerüstete, über jene hinausgreifende *organische* Naturerklärung nicht einmal dem Anfange nach getreten; sie kann, wie ich glaube, nur durch Wiederaufnahme und Fortbildung der Arbeiten und Bestrebungen Jener angebahnt werden.

Ein besonders schwieriger Punkt in dem Systeme des Spinoza ist das Verhältniss der endlichen Modi zu den unendlichen Modis; es bleibt dort unaufgeklärt, wieso und unter welchen Umständen sich das Endliche gegenüber dem Unendlichen oder das Unendliche gegenüber dem noch stärker Unendlichen in seiner Selbständigkeit behaupten könne. Das im § 4 bereits berührte Beispiel scheint mir in seiner schlichten Symbolik den Weg zu bezeichnen, auf welchem man der Lösung dieser Frage vielleicht näher kommen kann. Ist ω die erste Zahl der zweiten Zahlenclasse, so hat man: $1 + \omega = \omega$, dagegen $\omega + 1 = (\omega + 1)$, wo $(\omega + 1)$ eine von ω durchaus verschiedene Zahl ist. Auf die *Stellung* des Endlichen zum Unendlichen kommt also, wie man hier deutlich sieht, Alles an; tritt das Erstere vor, so geht es in dem Unendlichen auf und verschwindet darin, *bescheidet* es sich aber und nimmt seinen Platz *hinter* dem Unendlichen, so bleibt es erhalten und verbindet sich mit jenem zu einem neuen, weil modificirten Unendlichen.

§ 6.

Wenn es Schwierigkeiten bereiten sollte *unendlich grosse*, *abgeschlossene*, unter sich und mit den endlichen Zahlen vergleichbare, unter sich und mit den endlichen Zahlen durch feste Gesetze verbundene ganze Zahlen aufzufassen, so werden diese Schwierigkeiten mit der Wahrnehmung zusammenhängen, dass die neuen Zahlen zwar in vielen Beziehungen den Charakter der früheren, in viel mehr anderen Rücksichten aber eine durchaus eigenartige Natur haben, die es sogar oft mit sich bringt, dass verschiedene Merkmale an einer und derselben Zahl sich vereinigt finden, die bei den endlichen Zahlen nie zusammen vorkommen, sondern disparat sind. Findet sich doch schon an einer der im vorigen § citirten Stellen die Ueberlegung, eine unendliche ganze Zahl müsste, falls sie existirte, sowohl eine gerade, wie auch eine ungerade Zahl sein und da diese beiden Merkmale nicht vereinigt auftreten können, so existirt deshalb keine solche Zahl.

Man nimmt hier offenbar stillschweigend an, dass Merkmale, welche an den hergebrachten Zahlen disjunct sind, auch an den neuen Zahlen dieses Verhältniss zu einander haben müssten und schliesst daraus auf die Unmöglichkeit der unendlichen Zahlen. Wem springt hier der Paralogismus nicht in die Augen? Ist denn nicht jede Verallgemeinerung oder Erweiterung von Begriffen mit einem Aufgeben von Besonderheiten verbunden, ja selbst ohne ein solches undenkbar? Hat man nicht erst in neuerer Zeit den für die Entwickelung der Analysis so wichtigen, zu den grössten Fortschritten hinleitenden Gedanken gefasst, die complexen Grössen einzuführen, ohne ein Hinderniss darin zu sehen, dass sie weder positiv noch negativ genannt werden können? Und nur ein ähnlicher Schritt ist es, den ich hier wage; es wird vielleicht sogar dem allgemeinen Bewusstsein viel leichter werden mir zu folgen, als es möglich war von den reellen Zahlen zu den complexen überzugehen; denn die neuen ganzen Zahlen haben, wenn sie sich auch durch intensivere, substanzielle Bestimmtheit vor den hergebrachten auszeichnen, dennoch als Anzahlen durchaus die gleichartige Realität mit diesen gemein, wogegen der Einführung der complexen Grössen sich so lange Schwierigkeiten entgegenstellten, bis man ihre geometrische Repräsentation durch Punkte oder Strecken in einer Ebene nach vielen Mühen gefunden hatte.

Um auf jene Ueberlegung mit dem Gerade- und Ungeradesein noch kurz zurückzukommen, betrachten wir wieder die Zahl ω, um an ihr zu zeigen, wie jene an den endlichen Zahlen unvereinbaren Merkmale hier sich ohne jeglichen Widerspruch beisammen finden. In dem § 3 sind die allgemeinen Definitionen für die Addition und die Multiplication aufgestellt und ich habe hervorgehoben, dass bei diesen Operationen das commutative Gesetz im Allgemeinen keine Gültigkeit hat; hierin erblicke ich einen wesentlichen Unterschied zwischen den unendlichen und endlichen Zahlen. Beachte man noch, dass ich in einem Product $\beta\alpha$ unter β den Multiplicator, unter α den Multiplicandus verstehe. Ohne Weiteres ergeben sich alsdann für ω folgende zwei Formen: $\omega = \omega \cdot 2$ und $\omega = 1 + \omega \cdot 2$. Ihnen gemäss kann also ω sowohl als eine gerade, wie als eine ungerade Zahl aufgefasst werden. Von einem andern Gesichtspunkt, wenn nämlich 2 als Multiplicator genommen wird, liesse sich aber auch sagen, dass ω weder eine gerade noch eine ungerade Zahl ist, weil, wie man leicht beweisen kann, ω weder in der Form $2 \cdot \alpha$, noch in der Form $2 \cdot \alpha + 1$ sich darstellen lässt. Es hat also in der That die Zahl ω, im Vergleich zu den hergebrachten Zahlen eine ganz eigenartige Natur, da alle diese Merkmale und Eigenschaften in ihr vereinigt sind. Um noch vieles eigenartiger sind die übrigen Zahlen der zweiten Zahlenclasse, wie ich dies später zeigen werde.

§ 7.

Obgleich ich in §. 5 viele Stellen aus Leibniz' Werken angeführt habe, in welchen er sich gegen die unendlichen Zahlen ausspricht, indem er unter Anderm dort sagt: „Il n'y a point de nombre infini ni de ligne ou autre quantité infinie, si on les prend pour des Touts véritables.“ „L'infini véritable n'est pas une modification, c'est l'absolu; au contraire, dès qu'on modifie on se borne, on forme un fini“ (wobei ich ihm in der letzteren Stelle in Bezug auf die erste Aussage zustimme, hinsichtlich der zweiten aber nicht) bin ich doch andrerseits in der glücklichen Lage, Aussprüche desselben Denkers nachweisen zu können, in welchen er gewissermaassen im Widerspruch mit sich selbst für das Eigentlich-Unendliche (vom Absoluten Verschiedene) in der unzweideutigsten Weise sich ausspricht. So sagt er in Erdm. pag. 118:

„Je suis tellement pour l'infini actuel, qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer les perfections de son Auteur. Ainsi je crois qu'il n'y a aucune partie de la matière qui ne soit, je ne dis pas divisible, mais actuellement divisée ; et par conséquent la moindre particelle doit être considérée comme un monde plein d'une infinité de créatures différentes.“

Doch den entschiedensten Vertheidiger hat das Eigentlich-Unendliche, wie es uns beispielsweise in den wohldefinirten Punktmengen oder in der Constitution der Körper aus punktuellen Atomen, (ich meine also hier nicht die chemisch-physikalischen, Demokritischen Atome weil ich sie weder im Begriffe noch in der Wirklichkeit für existent halten kann, so viel Nützliches auch mit dieser Fiction bis zu einer gewissen Grenze zu Wege gebracht wird) entgegentritt, in einem höchst scharfsinnigen Philosophen und Mathematiker unseres Jahrhunderts, in Bernhard Bolzano gefunden, der seine betreffenden Ansichten namentlich in der schönen und gehaltreichen Schrift: „Paradoxien des Unendlichen, Leipzig 1851“ entwickelt hat, deren Zweck es ist, nachzuweisen, wie die von Skeptikern und Peripatetikern *aller Zeiten* im Unendlichen gesuchten Widersprüche gar nicht vorhanden sind, sobald man sich nur die freilich nicht immer ganz leichte Mühe nimmt, die Unendlichkeitsbegriffe allen Ernstes ihrem wahren Inhalte nach in sich aufzunehmen. In dieser Schrift findet man daher auch eine in vielen Beziehungen zutreffende Erörterung, über das mathematische Uneigentlich-Unendliche, wie es in der Gestalt von Differenzialen erster und höherer Ordnung oder in den unendlichen Reihensummen oder bei sonstigen Grenzprocessen auftritt. Dieses Unendliche (von einigen Scholastikern synkategorematisches Unendliches genannt) ist ein blosser Hülfs- und Beziehungsbegriff unseres Denkens, welcher seiner Definition nach die Veränderlichkeit einschliesst und von dem somit das „datur" niemals im eigentlichen Sinne ausgesagt werden kann.

Es ist sehr bemerkenswerth, dass hinsichtlich dieser Art des Unendlichen keinerlei wesentliche Meinungsverschiedenheit auch unter den Philosophen der Gegenwart herrscht, wenn ich davon absehen darf, dass gewisse moderne Schulen von sogenannten Positivisten oder Realisten[4)] oder Materialisten in diesem *synkategorematischen* Unendlichen, von welchem sie selbst zugeben müssen, dass es kein eigentliches Sein hat, den *höchsten Begriff* zu sehen glauben.

Doch findet sich schon bei Leibniz der im Wesentlichen richtige Sachverhalt an vielen Orten angegeben; denn auf dieses Uneigentlich-Unendliche bezieht sich beispielsweise die folgende Stelle Erdmann pag. 436:

„Ego philosophice loquendo non magis statuo magnitudines infinite parvas quam infinite magnas, seu non magis infinitesimas quam infinituplas. Utrasque enim per modum loquendi compendiosum pro mentis fictionibus habeo, ad calculum aptis, quales etiam sunt radices imaginariae in Algebra. Interim demonstravi, magnum has expressiones usum habere ad compendium cogitandi adeoque ad inventionem; et in errorem ducere non posse, cum pro infinite parvo substituere sufficiat tam parvum quam quis volet, ut error sit minor dato, unde consequitur errorem dari non posse."

Bolzano ist vielleicht der Einzige, bei dem die eigentlich-unendlichen Zahlen zu einem gewissen Rechte kommen, wenigstens ist von ihnen vielfach die Rede; doch stimme ich gerade in der Art, wie er mit ihnen umgeht, ohne eine rechte Definition von ihnen aufstellen zu können, ganz und gar nicht mit ihm überein und sehe beispielsweise die §§ 29-33 jenes Buches als haltlos und irrig an. Es fehlt dem Autor zur wirklichen Begriffsfassung bestimmt-unendlicher Zahlen sowohl der allgemeine *Mächtigkeitsbegriff*, wie auch der präcise *Anzahlbegriff*. Beide treten zwar an einzelnen Stellen ihrem Keime nach in Form von Specialitäten bei ihm auf, er arbeitet sich aber dabei zu der vollen Klarheit und Bestimmtheit, wie mir scheint, nicht durch und daraus erklären sich viele Inconsequenzen und selbst manche Irrthümer dieser werthvollen Schrift.

Ohne die erwähnten beiden Begriffe kommt man meiner Ueberzeugung nach in der Mannichfaltigkeitslehre nicht weiter und das Gleiche gilt, wie ich glaube, von den Gebieten, welche unter der Mannichfaltigkeitslehre stehen oder mit ihr die innigste Berührung haben, wie beispielsweise von der modernen Functionentheorie einerseits und von der Logik und Erkenntnisslehre andrerseits. Fasse ich das Unendliche so auf, wie dies von mir hier und bei meinen früheren Versuchen geschehen ist, so folgt daraus für mich ein wahrer Genuss, dem ich mich dankerfüllt hingebe, zu sehen, wie der ganze Zahlbegriff, der im Endlichen nur den Hintergrund der *Anzahl* hat, wenn wir aufsteigen zum Unendlichen sich gewissermassen *spaltet* in zwei Begriffe, in denjenigen der *Mächtigkeit*, welche unabhängig ist von der Ordnung die einer Menge gegeben wird und in den der *Anzahl*, welche nothwendig an eine gesetzmässige Ordnung der Menge gebunden ist, vermöge welcher letztere zu einer *wohlgeordneten Menge* wird. Und steige ich wieder herab vom Unendlichen zum Endlichen, so sehe ich ebenso klar und schön, wie die beiden Begriffe wieder Eins werden und *zusammenfliessen* zum Begriffe der endlichen ganzen Zahl.

§ 8.

Wir können in zwei Bedeutungen von der Wirklichkeit oder Existenz der ganzen Zahlen, der endlichen sowie der unendlichen sprechen; genau genommen sind es aber dieselben zwei Beziehungen, in welchen allgemein die Realität von irgend welchen Begriffen und Ideen in Betracht gezogen werden kann. Einmal dürfen wir die ganzen Zahlen insofern für wirklich ansehen, als sie auf Grund von Definitionen in unserm Verstande einen ganz bestimmten Platz einnehmen, von allen übrigen Bestandtheilen unseres Denkens aufs Beste unterschieden werden, zu ihnen in bestimmten Beziehungen stehen und somit die Substanz unseres Geistes in bestimmter Weise modificiren; es sei mir gestattet diese Art der Realität unsrer Zahlen ihre *intrasubjective* oder *immanente Realität* zu nennen.[5)] Dann kann aber auch den Zahlen insofern Wirklichkeit zugeschrieben werden, als sie für einen Ausdruck oder ein Abbild von Vorgängen und Beziehungen in der dem Intellect gegenüberstehenden Aussenwelt gehalten werden müssen, als ferner die verschiedenen Zahlenclassen (I), (II), (III) u. s. w. Repräsentanten von Mächtigkeiten sind, die in der körperlichen und geistigen Natur thatsächlich vorkommen. Diese zweite Art der Realität nenne ich die *transsubjective* oder auch *transiente Realität* der ganzen Zahlen.

Bei der durchaus realistischen, zugleich aber nicht weniger idealistischen Grundlage meiner Betrachtungen unterliegt es für mich keinem Zweifel, dass diese beiden Arten der Realität stets sich zusammenfinden in dem Sinne, dass ein in der ersteren Hinsicht als existent zu bezeichnender Begriff immer in gewissen, sogar unendlich vielen Beziehungen auch eine transiente Realität besitzt[6)], deren Feststellung freilich meist zu den mühsamsten und schwierigsten Aufgaben der Metaphysik gehört und oft den Zeiten überlassen werden muss, in welchen die natürliche Entwickelung einer der übrigen Wissenschaften die transiente Bedeutung des in Frage stehenden Begriffs enthüllt.

Dieser Zusammenhang beider Realitäten hat seinen eigentlichen Grund in der *Einheit* des *Alls, zu welchem wir selbst mitgehören*. – Der Hinweis auf diesen Zusammenhang hat nun hier den Zweck, eine mir sehr wichtig scheinende Consequenz für die Mathematik daraus herzuleiten, dass nämlich letztere bei der Ausbildung ihres Ideenmaterials *einzig* und *allein* auf die *immanente* Realität ihrer Begriffe Rücksicht zu nehmen und daher *keinerlei* Verbindlichkeit hat, sie auch nach ihrer *transienten* Realität zu prüfen. Wegen dieser ausgezeichneten Stellung, die sie von allen anderen Wissenschaften unterscheidet und die eine Erklärung für die verhältnissmässig leichte und zwanglose Art der Beschäftigung mit ihr liefert, verdient sie ganz besonders den Namen der *freien Mathematik*, eine Bezeichnung, welcher ich, wenn ich die Wahl hätte, den Vorzug vor der üblich gewordenen „reinen" Mathematik geben würde.

Die Mathematik ist in ihrer Entwickelung völlig frei und nur an die selbstredende Rücksicht gebunden, dass ihre Begriffe sowohl in sich widerspruchslos sind, als auch in festen durch Definitionen geordneten Beziehungen zu den vorher gebildeten, bereits vorhandenen und bewährten Begriffen stehen.[7)] Im Besondern ist sie bei der Einführung neuer Zahlen nur verpflichtet, Definitionen von ihnen zu geben, durch welche ihnen eine solche Bestimmtheit und unter Umständen eine solche Beziehung zu den älteren Zahlen verliehen wird, dass sie sich in gegebenen Fällen unter einander bestimmt unterscheiden lassen. Sobald eine Zahl allen diesen Bedingungen genügt, kann und muss sie als existent und real in der Mathematik betrachtet werden. Hierin erblicke ich den in §. 4 angedeuteten Grund, warum man die rationalen, irrationalen und die complexen Zahlen für durchaus ebenso existent anzusehen hat, wie die endlichen positiven ganzen Zahlen.

Es ist, wie ich glaube, nicht nöthig in diesen Grundsätzen irgendeine Gefahr für die Wissenschaft zu befürchten, wie dies von Vielen geschieht; einerseits sind die bezeichneten Bedingungen, unter welchen die Freiheit der Zahlenbildung allein geübt werden kann, derartige, dass sie der Willkür einen äusserst geringen Spielraum lassen; dann aber trägt auch jeder mathematische Begriff das nöthige Correctiv in sich selbst einher; ist er unfruchtbar oder unzweckmässig, so zeigt es sehr bald durch seine Unbrauchbarkeit und er wird alsdann, wegen mangelnden Erfolgs, fallen gelassen. Dagegen scheint mir aber jede überflüssige Einengung des mathematischen Forschungstriebes eine viel grössere Gefahr mit sich zu bringen und eine um so grössere, als dafür aus dem Wesen der Wissenschaft wirklich keinerlei Rechtfertigung gezogen werden kann; denn das *Wesen* der *Mathematik* liegt gerade in ihrer *Freiheit*.

Würde mir diese Beschaffenheit der Mathematik nicht aus den erwähnten Gründen sich ergeben haben, so müsste mich doch die ganze Entwickelung der Wissenschaft selbst, wie wir sie in unserm Jahrhundert wahrnehmen, genau zu denselben Ansichten hinführen.

Wären Gauss, Cauchy, Abel, Jacobi, Dirichlet, Weierstrass, Hermite und Riemann verbunden gewesen, ihre neuen Ideen stets einer metaphysischen Controlle zu unterwerfen, wir würden uns fürwahr nicht des grossartigen Aufbaues der neueren Functionentheorie zu erfreuen haben, der, obgleich völlig frei und ohne transeunte Zwecke entworfen und errichtet, dennoch schon jetzt in Anwendungen auf Mechanik, Astronomie und mathematische Physik seine transiente Bedeutung, wie nicht anders zu erwarten war, offenbart; wir würden nicht den grossen Aufschwung in der Theorie der Differentialgleichungen durch Fuchs, Poincaré und viele andere herbeigeführt sehen, wenn diese ausgezeichneten Kräfte durch fremdartige Einflüsse gehemmt und eingeschnürt gewesen wären; und wenn Kummer die folgenreiche Freiheit der Einführung sogenannter „idealer“ Zahlen in die Zahlentheorie sich nicht genommen haben würde, wir wären heute nicht in der Lage, die so wichtigen und vorzüglichen algebraischen und arithmetischen Arbeiten Kroneckers und Dedekinds zu bewundern.

So berechtigt daher die Mathematik ist, sich durchaus frei von allen metaphysischen Fesseln zu bewegen, vermag ich doch andrerseits der „angewandten“ Mathematik, wie beispielsweise der analytischen Mechanik und der mathematischen Physik dasselbe Recht nicht zuzugestehen; diese Disciplinen sind m. E. in ihren Grundlagen sowohl, wie in ihren Zielen *metaphysisch*; suchen sie sich hiervon frei zu machen, wie dies neuerdings seitens eines berühmten Physikers vorgeschlagen worden ist, so arten sie in eine „Naturbeschreibung“ aus, welcher der frische Hauch des freien mathematischen Gedankens ebensowohl, wie die Macht der *Erklärung* und *Ergründung* von Naturerscheinungen fehlen muss.

§ 9.

Bei der grossen Bedeutung, welche den sogenannten reellen, rationalen und irrationalen Zahlen in der Mannichfaltigkeitslehre zukommt, möchte ich es nicht unterlassen, über ihre Definitionen das Wichtigste hier zu sagen. Ich gehe auf die Einführung der rationalen Zahlen nicht näher ein, da hiervon streng arithmetische Darstellungen vielfach ausgebildet sind; von den mir näher stehenden hebe ich diejenigen von H. Grassmann (Lehrbuch der Arithmetik, Berlin 1861) und J. H. T. Müller (Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik, Halle 1855) hervor. Dagegen möchte ich in Kürze die drei mir bekannten und wohl auch im Wesentlichen einzigen Hauptformen der streng arithmetischen Einführung der allgemeinen reellen Zahlen genauer besprechen. Es sind dies *erstens* die Einführungsart, welcher sich Herr Prof. Weierstrass seit vielen Jahren in seinen Vorlesungen über analytische Functionen bedient und von welcher man einige Andeutungen in der Programmabhandlung von Herrn E. Kossak (Die Elemente der Arithmetik, Berlin 1872) finden kann. *Zweitens* hat Herr R. Dedekind in seiner Schrift: Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1872 eine eigenartige Definitionsform publicirt und *drittens* ist von mir im Jahre 1871 (Math. Annalen Bd. V, pag. 123) eine Definitionsform angegeben worden, die äusserlich eine gewisse Aehnlichkeit mit der Weierstrass'schen hat, so dass sie von Herrn H. Weber (Zeitschrift für Mathematik und Physik, 27. Jahrg., historisch liter. Abth., pag. 163) mit dieser verwechselt werden konnte; m. E. ist aber diese *dritte*, später auch von Herrn Lipschitz (Grundlagen der Analysis, Bonn 1877) entwickelte Definitionsform die einfachste und natürlichste von allen und man hat an ihr den Vortheil, dass sie sich dem analytischen Calcül am unmittelbarsten anpasst.

Zur Definition einer irrationalen reellen Zahl gehört stets eine wohldefinirte unendliche Menge erster Mächtigkeit von rationalen Zahlen; hierin besteht das Gemeinschaftliche aller Definitionsformen, ihr Unterschied liegt in dem Erzeugungsmoment, durch welches die Menge mit der durch sie definirten Zahl verknüpft ist und in den Bedingungen, welche die Menge zu erfüllen hat, damit sie als Grundlage für die betreffende Zahlendefinition sich eigne.

Bei der *ersten* Definitionsform wird eine Menge positiver rationaler Zahlen a_ν, zu Grunde gelegt, die mit (a_ν) bezeichnet werde und welche die Bedingung erfüllt, dass, wie viele und welche auch von den a_ν, in endlicher Anzahl summirt werden, diese Summe immer unterhalb einer angebbaren Grenze bleibt. Hat man nun zwei solche Aggregate (a_ν) und $(a_\nu{}')$, so wird strenge gezeigt, dass sie drei Fälle darbieten können; entweder ist jeder Theil $\frac{1}{n}$ der Einheit in beiden Aggregaten, sofern man ihre Elemente in hinreichender, vergrösserungsfähiger, endlicher Anzahl summirt, stets gleich oft enthalten; oder es ist $\frac{1}{n}$, von einem gewissen n an, in dem ersten Aggregat stets öfter als in dem zweiten, oder drittens es ist $\frac{1}{n}$, von einem gewissen n an, in dem zweiten stets öfter als in dem ersten enthalten. Diesen Vorkommnissen entsprechend wird, wenn b und b' die durch die beiden Aggregate (a_ν) und $(a_\nu{}')$, zu definirenden Zahlen sind, im ersten Falle $b = b'$, im zweiten $b > b'$, im dritten $b < b'$ gesetzt. Vereinigt man die beiden Aggregate zu einem neuen $(a_\nu, a_\nu{}')$, so giebt dieses die Grundlage für die Definition von $b + b'$; bildet man aber aus den beiden Aggregaten (a_ν) und $(a_\nu{}')$ das neue $(a_\nu \cdot a_\mu{}')$, in welchem die Elemente die Producte aus allen a_ν, in alle $a_\mu{}'$ sind, so wird dieses neue Aggregat zur Grundlage der Definition für das Product bb' genommen.

Man sieht, dass hier das Erzeugungsmoment, welches die Menge mit der durch sie zu definirenden Zahl verknüpft, in der Summenbildung liegt; doch muss als *wesentlich* hervorgehoben werden, dass nur die Summation einer stets endlichen Anzahl von rationalen Elementen zur Anwendung kommt und *nicht* etwa von vornherein die zu definirende Zahl b als die Summe Σa, der unendlichen Reihe (a_ν) gesetzt wird; es würde hierin ein *logischer Fehler* liegen, weil vielmehr die Definition der Summe Σa, erst durch Gleichsetzung mit der nothwendig vorher schon definirten, fertigen Zahl b gewonnen wird. Ich glaube, dass dieser erst von Herrn Weierstrass vermiedene logische Fehler in früheren Zeiten fast allgemein begangen und aus dem Grunde nicht bemerkt worden ist, weil er zu den seltenen Fällen gehört, in welchen wirkliche Fehler keinen bedeutenderen Schaden im Calcül anrichten können. – Trotzdem hängen, meiner Ueberzeugung nach, mit dem bezeichneten Fehler alle Schwierigkeiten zusammen, welche in dem Begriff des Irrationalen gefunden worden sind, wogegen bei Vermeidung dieses Fehlers die irrationale Zahl mit derselben Bestimmtheit, Deutlichkeit und Klarheit sich in unserm Geiste festsetzt, wie die rationale Zahl.

Die Definitionsform von Herrn Dedekind legt die Gesammtheit aller rationalen Zahlen, diese aber in zwei Gruppen derart getheilt zu Grunde, dass, wenn die Zahlen der ersten Gruppe mit $\mathfrak{A}_\nu$, die der zweiten Gruppe mit $\mathfrak{B}_\mu$, bezeichnet werden, stets $\mathfrak{A}_\nu < \mathfrak{B}_\mu$ ist; eine solche Theilung der rationalen Zahlenmenge nennt Herr Dedekind einen Schnitt derselben, bezeichnet ihn mit $(\mathfrak{A}_\nu|\mathfrak{B}_\mu)$ und ordnet ihm eine Zahl b zu. Vergleicht man zwei solche Schnitte $(\mathfrak{A}_\nu|\mathfrak{B}_\mu)$ und $(\mathfrak{A}_\nu{}'|\mathfrak{B}_\mu{}')$ mit einander, so finden sich ebenso wie bei der *ersten* Definitionsform im ganzen *drei* Möglichkeiten, denen entsprechend die durch die beiden Schnitte repräsentirten Zahlen b und b' einander gleich oder $b > b'$ oder $b < b'$ gesetzt werden. Der erste Fall findet, abgesehen von gewissen leicht zu regulirenden Ausnahmen, welche bei dem Rationalsein der zu definirenden Zahlen vorkommen, nur bei völliger Identität der beiden Schnitte statt und hierbei tritt der nicht wegzuleugnende entschiedene Vorzug dieser Definitionsform vor den beiden anderen hervor, dass jeder Zahl b nur ein einziger Schnitt entspricht, welchem Umstande aber der grosse Nachtheil gegenübersteht, dass die Zahlen in der Analysis sich *niemals* in der Form von „Schnitten" darbieten, in welche sie erst mit grosser Kunst und Umständlichkeit gebracht werden müssen.

Nun folgen auch hier die Definitionen für die Summe $b + b'$ und das Product bb' auf Grund neuer aus den beiden gegebenen hervorgehenden Schnitte.

Der Nachtheil, der mit der *ersten* und *dritten* Definitionsform verbunden ist, dass nämlich hier dieselben d. h. gleichen Zahlen unendlich oft sich darbieten und somit eine eindeutige Uebersicht über sämmtliche reellen Zahlen nicht unmittelbar erhalten wird, kann mit der grössten Leichtigkeit durch Specialisirung der zu Grunde gelegten Mengen (a_ν) beseitigt werden, indem man irgend eine der bekannten eindeutigen Systembildungen, wie das Decimalsystem oder die einfache Kettenbruchentwickelung heranzieht.

Ich komme nun zu der *dritten* Definitionsform der reellen Zahlen, Auch hier wird eine unendliche Menge rationaler Zahlen (a_ν) von der ersten Mächtigkeit zu Grunde gelegt, von ihr jedoch eine andere Beschaffenheit verlangt, wie bei der Weierstrass'schen Definitionsform; ich fordre, dass nach Annahme einer beliebig kleinen rationalen Zahl ε eine endliche Anzahl von Gliedern der Menge abgeschieden werden kann, so dass die übrig bleibenden paarweise einen Unterschied haben, der seiner absoluten Grösse nach kleiner ist als ε. Jede derartige Menge (a_ν), welche auch durch die Forderung:

$$\lim_{\nu=\infty}\left(a_{\nu+\mu} - a_\nu\right) = 0 \text{ (bei beliebig gelassenem } \mu\text{)}$$

charakterisirt werden kann, nenne ich eine *Fundamentalreihe* und ordne ihr eine durch sie zu definirende Zahl b zu, für welche man sogar zweckmässig das Zeichen (a_ν) selbst gebrauchen kann, wie dies von Herrn Heine, der in diesen Fragen nach vielen mündlichen Erörterungen sich mir angeschlossen hatte, in Vorschlag gebracht worden ist. (Man vgl. Borchardts J. Bd. 74 pag. 172). Eine solche *Fundamentalreihe* bietet, wie sich streng aus ihrem Begriffe deduciren lässt, drei Fälle dar; entweder es sind ihre Glieder a_ν für hinreichend grosse Werthe von ν kleiner, ihrem absoluten Betrage nach, als eine beliebig vorgegebene Zahl; oder es sind dieselben von einem gewissen ν an grösser als eine bestimmt angebbare positive rationale Zahl ϱ; oder sie sind von einem gewissen ν an kleiner als eine bestimmt angebbare negative rationale Grösse $-\varrho$. In dem ersten Falle sage ich, dass b gleich Null, im zweiten, dass b grösser als Null oder positiv, im dritten, dass b kleiner als Null oder negativ sei.

Nun kommen die Elementaroperationen. Sind (a_ν) und $(a_\nu{}')$ zwei *Fundamentalreihen* durch welche die Zahlen b und b' determinirt seien, so zeigt sich, dass auch $(a_\nu \pm a_\nu{}')$ und $(a_\nu \cdot a_\nu{}')$ *Fundamentalreihen* sind, die also drei neue Zahlen bestimmen, welche mir als Definitionen für die Summe und Differenz $b \pm b'$ und für das Product $b \cdot b'$ dienen.

Ist zudem b von Null verschieden, wofür im Vorhergehenden die Definition gegeben ist, so beweist man, dass auch $\left(\frac{a'_\nu}{a_\nu}\right)$ eine *Fundamentalreihe* ist, deren zugehörige Zahl die Definition für den Quotienten $\frac{b'}{b}$ liefert.

Die Elementaroperationen zwischen einer durch eine Fundamentalreihe (a_ν) gegebenen Zahl b und einer direct gegebenen rationalen Zahl a sind in den soeben festgesetzten eingeschlossen, indem man $a'_\nu = a, b' = a$ sein lässt.

Jetzt erst kommen die Definitionen des Gleich-, Grösser- und Kleinerseins zweier Zahlen b und b' (von denen b' auch $= a$ sein kann) und zwar sagt man, dass $b = b'$ oder $b > b'$ oder $b < b'$ ist, je nachdem $b - b'$ gleich Null oder grösser oder kleiner als Null ist.

Nach allen diesen Vorbereitungen ergiebt sich als erster *streng beweisbarer* Satz, dass, wenn b die durch eine Fundamentalreihe (a_ν) bestimmte Zahl ist, alsdann $b - a_\nu$, mit wachsendem ν dem absoluten Betrage nach kleiner wird als jede denkbare rationale Zahl, oder was dasselbe heisst, dass:

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = b$$

Man achte wohl auf diesen Cardinalpunct, dessen Bedeutung leicht übersehen werden kann: Bei der *dritten* Definitionsform wird nicht etwa die Zahl b definirt als Grenze der Glieder a_ν einer Fundamentalreihe (a_ν); denn dies würde ein ähnlicher logischer Fehler sein, wie der bei Besprechung der *ersten* Definitionsform hervorgehobene und zwar aus dem Grunde, weil alsdann die Existenz der Grenze $\lim_{\nu=\infty} a_\nu$ präsumirt würde; vielmehr verhält sich die Sache umgekehrt so, dass durch unsere vorangegangenen Definitionen der Begriff b mit solchen Eigenschaften und Beziehungen zu den rationalen Zahlen bedacht worden ist, dass daraus mit logischer Evidenz der Schluss gezogen werden kann: $\lim_{\nu=\infty} a_\nu$, existirt und ist gleich b. Man verzeihe mir hier die Ausführlichkeit, welche ich mit der Wahrnehmung motivire, dass an dieser unscheinbaren Kleinigkeit die Meisten vorübergehen und sich alsdann leicht in Zweifel und Widersprüche mit Bezug auf das Irrationale verstricken, von denen sie bei Beobachtung der hier hervorgehobenen Umstände völlig verschont bleiben würden; denn sie würden alsdann klar erkennen, dass die irrationale Zahl vermöge der ihr *durch die Definitionen gegebenen Beschaffenheit* eine ebenso bestimmte Realität in unserm Geiste hat, wie die rationale, selbst wie die ganze rationale Zahl und dass man sie nicht erst durch einen Grenzprocess zu *gewinnen* braucht, sondern vielmehr im Gegentheil durch ihren *Besitz* von der Thunlichkeit und Evidenz der Grenzprocesse allgemein überzeugt wird[8)]; denn nun erweitert man mit Leichtigkeit den soeben angeführten Satz zu folgendem: Ist (b_ν) irgend eine Menge rationaler oder irrationaler Zahlen mit der Beschaffenheit, dass $\lim\limits_{\nu=\infty}\left(b_{\nu+\mu}-b_\nu\right)=0$, (was auch μ sei), so giebt es eine durch eine Fundamentalreihe (a_ν) bestimmte Zahl b, so dass:

$$\lim_{\nu=\infty} b_\nu = b$$

Es zeigt sich also, dass *dieselben* Zahlen b, welche auf Grund von Fundamentalreihen (a_ν) (ich nenne diese Fundamentalreihen von der *ersten* Ordnung) derart definirt sind, dass sie sich als Grenzen der a_ν ausweisen, auf mannichfache Weisen auch als Grenzen von Reihen (b_ν) darstellbar sind, wo jedes der b_ν, durch eine Fundamentalreihe erster Ordnung $\left(a_\mu{}^{(\nu)}\right)$ (mit festem ν) definirt ist.

Ich nenne daher eine solche Menge (b_ν), wenn sie die Beschaffenheit hat, dass $\lim\limits_{\nu=\infty}\left(b_{\nu+\mu}-b_\nu\right)=0$ (bei beliebigem μ), eine Fundamentalreihe *zweiter* Ordnung.

Ebenso lassen sich Fundamentalreihen *dritter*, *vierter*, .. n^{ter} Ordnung, aber auch Fundamentalreihen α^{ter} Ordnung bilden, wo α eine beliebige Zahl der zweiten Zahlenclasse ist.

Alle diese Fundamentalreihen leisten für die Bestimmung einer reellen Zahl b genau dasselbe, wie die Fundamentalreihen *erster* Ordnung und der Unterschied liegt nur in der complicirteren, ausgebreiteteren Form des Gegebenseins. Nichts destoweniger scheint es mir, wofern man sich auf den Standpunkt der dritten Definitionsform überhaupt stellen will, in hohem Grade angemessen, diesen Unterschied in der bezeichneten Weise zu fixiren, wie ich dies auch am angeführten Orte (Math. Ann. Bd. V, pag. 123) in ähnlicher Weise schon gethan habe. Ich bediene mich deshalb jetzt der Ausdrucksweise: die Zahlengrösse b ist durch eine Fundamentalreihe n^{ter} resp. α^{ter} Ordnung gegeben. Entschliesst man sich hierzu, so erreicht man damit eine ausserordentlich leichtflüssige und zugleich fassliche Sprache, um die Fülle der vielgestaltigen, oft so complicirten Gewebe der Analysis in der allereinfachsten und bezeichnendsten Weise zu beschreiben, womit ein nach meiner Meinung nicht zu unterschätzender Gewinn an Klarheit und Durchsichtigkeit erzielt wird. Ich trete hiermit dem Bedenken entgegen, welches Herr Dedekind in der Vorrede seiner Schrift „Stetigkeit und irrationale Zahlen“ hinsichtlich dieser Unterscheidungen ausgesprochen hat; es lag mir nicht entfernt im Sinne, durch die Fundamentalreihen zweiter, dritter Ordnung etc. *neue* Zahlen einzuführen, die nicht schon durch die Fundamentalreihen erster Ordnung bestimmbar wären, sondern ich hatte nur die begrifflich verschiedene Form des Gegebenseins im Auge; es geht dies aus einzelnen Stellen meiner Arbeit selbst deutlich hervor.

Auf einen merkwürdigen Umstand möchte ich hierbei aufmerksam machen, dass nämlich in diesen von mir durch Zahlen der ersten und zweiten Zahlenclasse unterschiedenen Ordnungen von Fundamentalreihen, alle überhaupt denkbaren in der Analysis bereits gefundenen oder noch ungefundenen Formen mit dem üblichen Reihencharakter durchaus erschöpft sind, in dem Sinne, dass es Fundamentalreihen deren Ordnungszahl etwa durch eine Zahl der dritten Zahlenclasse bezeichnet werden möchte, gar nicht giebt, wie ich bei anderer Gelegenheit streng beweisen werde.

Ich will nun in Kürze versuchen, die Zweckmässigkeit der *dritten* Definitionsform zu erklären.

Zur Bezeichnung dafür, dass eine Zahl b auf Grund einer Fundamentalreihe e_ν irgend welcher Ordnung n oder α gegeben ist, bediene ich mich der Formeln:

$$b \backsim (e_\nu) \text{ oder } (e_\nu) \backsim b$$

Liegt beispielsweise eine convergente Reihe mit dem allgemeinen Gliede c_ν vor, so ist die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Convergenz bekanntlich diese, dass: $\lim\limits_{\nu=\infty}\left(c_{\nu+1} + \cdots + c_{\nu+\mu}\right) = 0$ (wo μ beliebig).

Man definirt daher die Summe der Reihe durch die Formel:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \sim \left(\sum_{n=0}^{\nu} c_n\right)$$

Sind z. B. alle c_n, definirt auf Grund von Fundamentalreihen k^{ter} Ordnung, so gilt ein gleiches von $\sum_{n=0}^{\nu} c_n$ und es tritt uns hier die Summe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ als definirt durch eine Fundamentalreihe $(k+1)^{\text{ter}}$ Ordnung entgegen.

Soll beispielsweise der gedankliche Inhalt des Satzes $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ beschrieben werden, so kann man sich etwa $\frac{\pi}{2}$ und dessen Potenzen gegeben denken durch die Formeln:

$$\frac{\pi}{2} \sim (a_\nu),\ \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1} \sim ({a_\nu}^{2m+1})$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$2\sum_{n=0}^{\nu} \frac{(-1)^n}{2n+1} = a_\nu$$

Ferner wird sein:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sim \left(\sum_{m=0}^{\mu} (-1)^m \frac{(\frac{\pi}{2})^{2m+1}}{(2m+1)!} \right)$$

d. h. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ist auf Grund einer Fundamentalreihe zweiter Ordnung definirt, und durch jenen Satz wird also das Gleichsein der rationalen Zahl 1 und einer auf Grund einer Fundamentalreihe zweiter Ordnung gegebenen Zahl $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ausgedrückt.

In ähnlicher Weise lässt sich der gedankliche Inhalt complicirterer Formeln, wie beispielsweise derjenigen aus der Theorie der Thetafunctionen präcis und verhältnissmässig einfach beschreiben, – während die Zurückführung unendlicher Reihen auf solche, die aus lauter rationalen Gliedern, zumal mit stets gleichem Vorzeichen, gebildet sind und unbedingt convergiren, meistens mit der grössten Umständlichkeit verbunden ist, die hier bei der *dritten* Definitionsform im Gegensatze zur *ersten* gänzlich vermieden wird und offenbar auch vermieden werden kann, so lange es sich nicht um eine numerische näherungsweise Bestimmung von Reihensummen mittelst rationaler Zahlen, sondern allein um unbedingt scharfe Definitionen derselben sich handelt. Die *erste* Definitionsform scheint mir allerdings nicht so leicht brauchbar zu sein, wenn es sich um die präcise Definition der Summen von Reihen handelt, die nicht unbedingt convergiren, bei denen vielmehr die Anordnung ihrer sowohl positiven wie negativen Glieder eine bestimmt vorgezeichnete ist. Doch selbst bei Reihen mit unbedingter Convergenz wird die Herstellung der Summe, wenn auch letztere unabhängig von der Anordnung ist, nur bei einer bestimmten Anordnung wirklich ausführbar sein; man ist daher auch in solchen Fällen versucht, der *dritten* Definitionsform den Vorzug vor der ersten zu geben. Endlich scheint mir für die *dritte* Definitionsform ihre Verallgemeinerungsfähigkeit auf *überendliche* Zahlen zu sprechen, während eine solche Ausbildung der *ersten* Definitionsform ganz *unmöglich* ist; dieser Unterschied liegt einfach daran, dass bei den überendlichen Zahlen das commutative Gesetz schon bei der Addition im Allgemeinen ungültig ist; die erste Definitionsform ist aber mit diesem Gesetze *untrennbar verknüpft*, sie steht und fällt mit demselben. Doch bei allen Zahlenarten, wo das commutative Additiongesetz gültig ist, erweist sich die *erste* Definitionsform, abgesehen von den bezeichneten Puncten, als ganz vortrefflich.

§ 10.

Der Begriff des „Continuums“ hat in der Entwickelung der Wissenschaften überall nicht nur eine bedeutende Rolle gespielt, sondern auch stets die grössten Meinungsverschiedenheiten und sogar heftige Streitigkeiten hervorgerufen. Dies liegt vielleicht daran, dass die ihm zu Grunde liegende Idee in ihrer Erscheinung bei den Dissentirenden einen verschiedenen Inhalt aus dem Grunde angenommen hat, weil ihnen die genaue und vollständige Definition des Begriffs nicht überliefert worden war; vielleicht aber auch, und dies ist mir das Wahrscheinlichste, ist die Idee des

Continuums schon von denjenigen Griechen, welche sie zuerst gefasst haben mögen, nicht mit der Klarheit und Vollständigkeit gedacht worden, welche erforderlich gewesen wäre, um die Möglichkeit verschiedener Auffassungen seitens der Nachfolger auszuschliessen. So sehen wir, dass Leukipp, Demokrit und Aristoteles das Continuum als ein Compositum betrachten, welches ex partibus sine fine divisibilibus besteht, dagegen Epikur und Lucretius dasselbe aus ihren Atomen, als endlichen Dingen zusammensetzen, woraus nachmals ein grosser Streit unter den Philosophen entstanden ist, von denen einige dem Aristoteles, andere dem Epikur gefolgt sind; andere wieder statuirten, um diesem Streit fern zu bleiben, mit Thomas von Aquino,[9)] dass das Continuum weder aus unendlich vielen, noch aus einer endlichen Anzahl von Theilen, sondern aus *gar keinen* Theilen bestehe; diese letztere Meinung scheint mir weniger eine Sacherklärung als das stillschweigende Bekenntniss zu enthalten, dass man der Sache nicht auf den Grund gekommen ist und es vorzieht, ihr vornehm aus dem Wege zu gehen. Hier sehen wir den *mittelalterlich-scholastischen Ursprung* einer Ansicht, die wir noch heutigen Tages vertreten finden, wonach das Continuum ein unzerlegbarer Begriff oder auch, wie andere sich ausdrücken, eine reine aprioristische Anschauung sei, die kaum einer Bestimmung durch Begriffe zugänglich wäre; jeder arithmetische *Determinationsversuch* dieses *Mysteriums* wird als ein unerlaubter Eingriff angesehen und mit gehörigem Nachdruck zurückgewiesen; schüchterne Naturen empfangen dabei den Eindruck, als ob es sich bei dem „Continuum" nicht um einen *mathematisch-logischen Begriff* sondern viel eher um ein *religiöses Dogma* handle.

Mir liegt es sehr fern, diese Streitfragen wieder heraufzubeschwören, auch würde mir zu einer genaueren Besprechung derselben in diesem engen Rahmen der Raum fehlen; ich sehe mich nur verpflichtet, den Begriff des Continuums, so logisch-nüchtern wie ich ihn auffassen muss und in der Mannichfaltigkeitslehre ihn brauche, hier möglichst kurz und auch nur mit Rücksicht auf die *mathematische* Mengenlehre zu entwickeln. Diese Bearbeitung ist mir aus dem Grunde nicht leicht geworden, weil unter den Mathematikern, auf deren Autorität ich mich gern berufe, kein Einziger sich mit dem Continuum in dem Sinne genauer beschäftiget hat, wie ich es hier nöthig habe.

Man hat zwar unter Zugrundelegung einer oder mehrerer reellen oder complexen continuirlichen Grössen (oder, wie ich glaube richtiger mich auszudrücken, continuirlicher Grössenmengen) den Begriff eines von ihnen ein- oder mehrdeutig abhängigen Continuums, d. h. den stetigen Functionsbegriff nach den verschiedensten Richtungen aufs Beste ausgebildet und es ist auf diese Weise die Theorie der sogenannten *analytischen* Functionen, wie auch der allgemeineren Functionen mit ihren höchst merkwürdigen Erscheinungen (wie Nichtdifferentiirbarkeit und Aehnliches) entstanden; aber das *unabhängige* Continuum selbst ist von den mathematischen Autoren nur in jener einfachsten Erscheinungsform vorausgesetzt und keiner eingehenderen Betrachtung unterworfen worden.

Zunächst habe ich zu erklären, dass meiner Meinung nach die Heranziehung des *Zeitbegriffs* oder der *Zeitanschauung* bei Erörterung des viel ursprünglicheren und allgemeineren Begriffs des Continuums nicht in der Ordnung ist; die *Zeit* ist meines Erachtens eine Vorstellung, die zu ihrer deutlichen Erklärung den von ihr unabhängigen Continuitätsbegriff zur Voraussetzung hat und sogar mit Zuhülfenahme desselben weder objectiv als eine Substanz, noch subjectiv als eine nothwendige apriorische Anschauungsform aufgefasst werden kann, sondern nichts Anderes als ein *Hülfs- und Beziehungsbegriff* ist, durch welchen die Relation zwischen verschiedenen in der Natur vorkommenden und von uns wahrgenommenen Bewegungen festgestellt wird. So etwas wie *objective* oder *absolute Zeit* kommt in der Natur nirgends vor und es kann daher auch nicht die *Zeit* als Maass der *Bewegung*, viel eher könnte diese als Maass der *Zeit* angesehen werden, wenn nicht dem Letzteren entgegenstünde, dass die *Zeit* selbst in der bescheidenen Rolle einer *subjectiv nothwendigen apriorischen* Anschauungsform es zu keinem erspriesslichen, unangefochtenen Gedeihen hat bringen können, obgleich ihr seit Kant die Zeit dazu nicht gefehlt haben würde.

Ebenso ist es meine Ueberzeugung, dass man mit der sogenannten *Anschauungsform* des *Raumes* gar nichts anfangen kann, um Aufschluss über das *Continuum* zu gewinnen, da auch der *Raum* und die in ihm gedachten Gebilde nur mit Hülfe eines begrifflich bereits fertigen Continuums denjenigen Gehalt erlangen, mit welchem sie Gegenstand nicht blos ästhetischer Betrachtungen oder philosophischen Scharfsinnes oder ungenauer Vergleiche, sondern nüchtern-exacter mathematischer Untersuchungen werden können.

Somit bleibt mir nichts Anderes übrig, als mit Hülfe der in § 9 definirten reellen Zahlbegriffe einen möglichst allgemeinen rein arithmetischen Begriff eines Punctcontinuums zu versuchen. Als Grundlage dient mir hierbei, wie dies nicht anders sein kann, der n-dimensionale ebene *arithmetische* Raum G_n, d. h. der Inbegriff aller Werthsysteme:

$$(x_1 | x_2 | \dots | x_n),$$

in welchen jedes x unabhängig von den anderen *alle reellen* Zahlenwerthe von $-\infty$ bis $+\infty$ erhalten kann. Jedes besondere derartige Werthsystem nenne ich einen *arithmetischen* Punct von G_n. Die Entfernung zweier solcher Puncte wird durch den Ausdruck:

$$+\sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + \cdots + (x'_n - x_n)^2}$$

definirt und unter einer *arithmetischen* in G_n enthaltenen Punctmenge P jeder gesetzmässig gegebene Inbegriff von Puncten des Raumes G_n verstanden. Die Untersuchung läuft also darauf hinaus, eine scharfe und zugleich möglichst allgemeine Definition dafür aufzustellen, *wann P ein Continuum zu nennen ist*.

Ich habe in Borchardts J. Bd. 84, pag. 242 bewiesen, dass alle Räume G_n, wie gross auch die sogenannte Dimensionenanzahl n sei, *gleiche* Mächtigkeit haben und folglich *ebenso mächtig* sind wie das Linearcontinuum, wie also etwa der Inbegriff aller reellen Zahlen des Intervalles $(0 \dots 1)$. Es reducirt sich daher die Untersuchung und Feststellung der Mächtigkeit von G_n, auf dieselbe Frage, specialisirt auf das Intervall $(0 \dots 1)$ und ich hoffe, sie schon bald durch einen strengen Beweis dahin beantworten zu können, dass die gesuchte Mächtigkeit keine andere ist als diejenige unserer zweiten Zahlenclasse (II). Hieraus wird folgen, dass sämmtliche unendliche Punktmengen P entweder die Mächtigkeit der ersten Zahlenclasse (I) oder die Mächtigkeit der zweiten Zahlenclasse (II) haben. Es wird sich auch noch die weitere Consequenz daraus ziehen lassen, dass der Inbegriff aller Functionen von einer oder mehreren Veränderlichen, welche durch eine vorgegebene unendliche Reihenform, gleichviel welche, darstellbar sind, *auch nur* die Mächtigkeit der zweiten Zahlenclasse (II) besitzt und daher *durch* Zahlen der dritten Zahlenclasse (III) *abzählbar* ist.[10)] Dieser Satz wird sich also beispielsweise auf den Inbegriff aller „analytischen", d. h. durch Fortsetzung convergenter Potenzreihen hervorgehender Functionen von einer oder mehreren Veränderlichen oder auf die Menge aller Functionen einer oder mehrerer reellen Veränderlichen beziehen, die durch trigonometrische Reihen darstellbar sind.

Um nun dem allgemeinen Begriff eines innerhalb G_n, gelegenen Continuums näher zu kommen, erinnere ich an den Begriff der Ableitung $P^{(1)}$ einer beliebig gegebenen Punktmenge P, wie er zuerst in der Arbeit: Math. Ann. Bd. V, dann in Bd. XV, XVII, XX und XXI sich entwickelt und zum Begriff einer Ableitung $P^{(\gamma)}$ erweitert findet, wo γ irgend eine ganze Zahl einer der Zahlclassen (I), (II), (III) etc. sein kann.

Es lassen sich nun die Punktmengen P auch nach der Mächtigkeit ihrer ersten Ableitung $P^{(1)}$ in zwei Classen eintheilen. Hat $P^{(1)}$ die Mächtigkeit von (I), so zeigt sich, wie ich in § 3 dieser Schrift schon gesagt habe, dass es eine erste ganze Zahl α der *ersten* oder *zweiten* Zahlenclasse (II) giebt, für welche $P^{(\alpha)}$ verschwindet. Hat aber $P^{(1)}$ die Mächtigkeit der zweiten Zahlenclasse (II), so lässt sich $P^{(1)}$ stets und zwar nur auf einzige Weise in zwei Mengen R und S zerlegen, so dass:

$$P^{(1)} \equiv R + S,$$

wo R und S eine äusserst verschiedene Beschaffenheit haben:

R ist so beschaffen, dass sie durch den wiederholten Ableitungsprocess einer fortwährenden Reduction bis zur Annihilation fähig ist, so dass es immer eine erste ganze Zahl γ der Zahlenclassen (I) oder (II) giebt, für welche:

$$R^{(\gamma)} \equiv 0;$$

solche Punktmengen R nenne ich *reductibel*.

S dagegen ist so beschaffen, dass bei dieser Punktmenge der Ableitungsprocess gar keine Aenderung hervorbringt, indem:

$$S \equiv S^{(1)}$$

und folglich auch:

$$S \equiv S^{(\gamma)}$$

ist; derartige Mengen S nenne ich *perfecte* Punktmengen. Wir können daher sagen: ist $P^{(1)}$ von der Mächtigkeit der zweiten Zahlenclasse (II), so zerfällt $P^{(1)}$ in eine bestimmte *reductible* und eine bestimmte *perfecte* Punktmenge.

Obgleich diese beiden Prädicate „reductibel" und „perfect" in einer und derselben Punktmenge nicht vereinbar sind, so ist doch andrerseits irreductibel nicht soviel wie perfect und ebenso wenig imperfect genau dasselbe wie reductibel, wie man bei einiger Aufmerksamkeit leicht sieht.

Die *perfecten* Punktmengen S sind keineswegs immer in ihrem Innern das, was ich in meinen vorhin genannten Arbeiten „überalldicht" genannt habe[11)]; deshalb eignen sie sich auch noch nicht allein zur vollständigen Definition eines Punktcontinuums, wenn man auch sofort zugeben muss, dass letzteres stets eine *perfecte* Menge sein muss.

Es ist vielmehr noch ein Begriff erforderlich, um im Verein mit dem vorhergehenden das Continuum zu definiren, nämlich der Begriff einer *zusammenhängenden* Punktmenge T.

Wir nennen T eine *zusammenhängende* Punktmenge, wenn für je zwei Punkte t und t' derselben, bei vorgegebener beliebig kleiner Zahl ε immer eine *endliche* Anzahl Punkte $t_1, t_2, \dots t_\nu$ von T auf mehrfache Art vorhanden sind, so dass die Entfernungen $\overline{tt_1}, \overline{t_1t_2}, \overline{t_2t_3}, \dots \overline{t_\nu t'}$ sämmtlich kleiner sind als ε.

Alle uns bekannten geometrischen Punktcontinua fallen nun auch, wie leicht zu sehen, unter diesen Begriff der *zusammenhängenden* Punktmenge; ich glaube aber nun auch in diesen *beiden* Prädicaten „perfect" und „zusammenhängend" die nothwendigen und *hinreichenden* Merkmale eines Punktcontinuums zu erkennen und definire daher ein Punktcontinuum innerhalb G_n, als eine *perfect-zusammenhängende Menge*.[12)] Hier sind „perfect" und „zusammenhängend" nicht blosse Worte, sondern durch die vorangegangenen Definitionen aufs schärfste begrifflich charakterisirte, ganz allgemeine Prädicate des *Continuums*.

Die Bolzanosche Definition des Continuums (Paradoxien § 38) ist gewiss nicht richtig; sie drückt einseitig bloss *eine* Eigenschaft des Continuums aus, die aber auch erfüllt ist bei Mengen, welche aus G_n dadurch hervorgehen, dass man sich von G_n irgend eine „isolirte" Punktmenge (man vgl. Math. Ann. Bd. XXI, pag. 51) entfernt denkt; desgleichen ist sie erfüllt bei Mengen, welche aus mehreren getrennten Continuis bestehen; offenbar liegt in solchen Fällen kein Continuum vor, obgleich nach Bolzano dies der Fall wäre: Wir sehen also hier einen Verstoss gegen den Satz: „ad essentiam alicujus rei pertinet id, quo dato res necessario ponitur et quo sublato res necessario tollitur; vel id, sine quo res, et vice versa quod sine re nec esse nec concipi potest."

Ebenso scheint mir aber auch in der Schrift des Herrn Dedekind (Stetigkeit und irrationale Zahlen) nur eine *andere* Eigenschaft des Continuums einseitig hervorgehoben zu sein, diejenige nämlich, welche es mit *allen* „*perfecten*“ Mengen gemeinsam hat.

§ 11.

Es soll nun gezeigt werden, wie man zu den Definitionen der neuen Zahlen geführt wird und auf welche Weise sich die natürlichen Abschnitte in der absolut-unendlichen realen ganzen Zahlenfolge, welche ich *Zahlenclassen* nenne, ergeben. An diese Auseinandersetzung will ich alsdann nur noch die obersten Sätze über die *zweite* Zahlenclasse und ihr Verhältniss zur ersten hinzufügen. Die Reihe (I) der positiven realen ganzen Zahlen $1, 2, 3, \dots, \nu, \dots$ hat ihren Entstehungsgrund in der wiederholten Setzung und Vereinigung von zu Grunde gelegten als gleich angesehenen Einheiten; die Zahl ν ist der Ausdruck sowohl für eine bestimmte endliche Anzahl solcher auf einander folgenden Setzungen, wie auch für die Vereinigung der gesetzten Einheiten zu einem Ganzen. Es beruht somit die Bildung der endlichen ganzen realen Zahlen auf dem Princip der Hinzufügung einer Einheit zu einer vorhandenen schon gebildeten Zahl; ich nenne dieses Moment, welches, wie wir gleich sehen werden, auch bei der Erzeugung der höheren ganzen Zahlen eine wesentliche Rolle spielt das *erste Erzeugungsprincip*. Die Anzahl der so zu bildenden Zahlen ν der Classe (I) ist unendlich und es giebt unter ihnen keine grösste. So widerspruchsvoll es daher wäre, von einer grössten Zahl der Classe (I) zu reden, hat es doch andrerseits nichts Anstössiges, sich eine *neue* Zahl, wir wollen sie ω nennen*, zu denken, welche der Ausdruck dafür sein soll, dass der ganze Inbegriff (I) in seiner natürlichen Succession dem Gesetze nach gegeben sei. (Aehnlich wie ν ein Ausdruck dafür ist, dass eine gewisse endliche Anzahl von Einheiten zu einem Ganzen vereiniget wird.) Es ist sogar erlaubt, sich die neugeschaffene Zahl ω als *Grenze* zu denken, welcher die Zahlen ν zustreben, wenn darunter nichts Anderes verstanden wird, als dass ω die *erste* ganze Zahl sein soll, welche auf alle Zahlen ν folgt, d. h. grösser zu nennen ist, als jede der Zahlen ν. Indem man auf die Setzung der Zahl ω weitere Setzungen der Einheit folgen lässt, erhält man mit Hülfe des *ersten* Erzeugungsprincips die weiteren Zahlen

$$\omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega + \nu, \dots;$$

da man hierbei wieder zu keiner grössten Zahl kommt, so denkt man sich eine neue, die man 2ω nennen kann und welche die erste auf alle bisherigen Zahlen ν und $\omega + \nu$ folgende sein soll; wendet man auf die Zahl 2ω das *erste* Erzeugungsprincip wiederholt an, so kommt man zu der Fortsetzung:

$$2\omega + 1, 2\omega + 2, \dots, 2\omega + \nu, \dots$$

* Das Zeichen ∞, welches ich in Nr. 2 dieses Aufsatzes (Bd. XVII, pag. 357) gebraucht habe, ersetze ich von nun an durch ω, weil das Zeichen ∞ schon vielfach zur Bezeichnung von unbestimmten Unendlichkeiten verwandt wird.

der bisherigen Zahlen.

Die logische Function, welche uns die beiden Zahlen ω und 2ω geliefert hat, ist offenbar verschieden von dem *ersten* Erzeugungsprincip, ich nenne sie das *zweite Erzeugungsprincip* ganzer realer Zahlen und definire dasselbe näher dahin, dass – wenn irgend eine bestimmte Succession definirter ganzer realer Zahlen vorliegt, von denen keine grösste existirt, auf Grund dieses zweiten Erzeugungsprincips eine neue Zahl geschaffen wird, welche als *Grenze* jener Zahlen gedacht, d. h. als die ihnen allen nächst grössere Zahl definirt wird.

Durch combinirte Anwendung beider Erzeugungsprincipien erhält man daher successive die folgenden Fortsetzungen unserer bisher gewonnenen Zahlen:

$$3\omega + 1, 3\omega + 2, \dots, 3\omega + \nu, \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mu\omega + 1, \mu\omega + 2, \dots, \mu\omega + \nu, \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Doch wird auch hierdurch kein Abschluss erzielt, weil von den Zahlen $\mu\omega + \nu$ gleichfalls keine die grösste ist.

Das zweite Erzeugungsprincip veranlasst uns daher zur Einführung einer auf alle Zahlen $\mu\omega + \nu$ nächstfolgenden, die ω^2 genannt werden kann, an diese schliessen sich in bestimmter Succession Zahlen:

$$\lambda\omega^2 + \mu\omega + \nu,$$

und man kommt dann unter Befolgung der beiden Erzeugungsprincipien offenbar zu Zahlen von folgender Form:

$$\nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} \dots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu;$$

doch treibt uns alsdann das zweite Erzeugungsprincip zum Setzen einer neuen Zahl, welche die diesen Zahlen allen nächst grössere sein soll und passend mit:

$$\omega^\omega$$

bezeichnet wird.

Die Bildung neuer Zahlen hat, wie man sieht, kein Ende; unter Befolgung der *beiden* Erzeugungsprincipe erhält man immer wieder neue Zahlen und Zahlenreihen, die eine völlig bestimmte Succession haben.

Es wird daher zunächst der *Anschein* erweckt, als ob wir uns bei dieser Bildungsweise neuer ganzer bestimmt-unendlicher Zahlen ins *Grenzenlose* hin verlieren müssten, und dass wir ausser Stande seien, diesem endlosen Process einen *gewissen vorläufigen* Abschluss zu geben, um dadurch eine ähnliche Beschränkung zu gewinnen, wie sie in Bezug auf die ältere Zahlenclasse (I) in gewissem Sinne thatsächlich vorhanden war; dort wurde nur von dem *ersten* Erzeugungsprincip

Gebrauch gemacht und somit ein Heraustreten aus der Reihe (I) unmöglich. Das *zweite* Erzeugungsprincip musste aber nicht nur über das bisherige Zahlengebiet hinausführen, sondern erweist sich allerdings als ein Mittel, welches im Verein mit dem *ersten* Erzeugungsprincip die Befähigung giebt, *jede Schranke* in der Begriffsbildung der realen ganzen Zahlen zu *durchbrechen*.

Bemerken wir nun aber, dass alle bisher erhaltenen Zahlen und die zunächst auf sie folgenden eine gewisse Bedingung erfüllen, so erweist sich diese Bedingung, *wenn sie als Forderung an alle zunächst zu bildenden Zahlen gestellt wird*, als ein neues, zu jenen beiden hinzutretendes *drittes* Princip, welches von mir *Hemmungs- oder Beschränkungsprincip* genannt wird und das, wie ich zeigen werde, bewirkt, dass die mit seiner Hinzuziehung definirte zweite Zahlenclasse (II) nicht nur eine höhere Mächtigkeit erhält als (I), sondern sogar genau die *nächst höhere*, also *zweite Mächtigkeit*.

Die erwähnte Bedingung, welche jede der bisher definirten unendlichen Zahlen α, wie man sich sofort überzeugt, erfüllt, ist – dass die Menge der dieser Zahl in der Zahlenfolge vorausgegangenen Zahlen von der Mächtigkeit der ersten Zahlenclasse (I) ist. Nehmen wir z. B. die Zahl ω^ω, so sind die ihr vorausgehenden in der Formel enthalten:

$$\nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} \dots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu,$$

worin $\mu, \nu_0, \nu_1, \dots \nu_\mu$ alle endlichen, positiven, ganzen Zahlenwerthe mit Einschluss der Null und mit Ausschluss der Verbindung: $\nu_0 = \nu_1 = \cdots = \nu_\mu = 0$ anzunehmen haben.

Wie bekannt, lässt sich diese Menge in die Form einer einfach unendlichen Reihe bringen und hat also die Mächtigkeit von (I).

Da ferner eine jede Folge von Mengen, von denen jegliche die *erste* Mächtigkeit hat, wenn jene Folge selbst von der *ersten* Mächtigkeit ist, immer wieder eine Menge ergiebt, welche die Mächtigkeit von (I) hat, so ist klar, dass bei Fortsetzung unserer Zahlenfolge man *wirklich zunächst immer wieder nur solche Zahlen* erhält, bei denen jene Bedingung *thatsächlich* erfüllt ist.

Wir definiren daher die zweite Zahlenclasse (II) *als den Inbegriff aller mit Hülfe der beiden Erzeugungsprincipe bildbaren, in bestimmter Succession fortschreitenden Zahlen* α:

$$\omega, \omega + 1, \dots, \nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} \dots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu, \dots, \omega^\omega, \dots, \alpha \dots$$

welche der Bedingung unterworfen sind, dass alle der Zahl α *voraufgehenden Zahlen, von* 1 *an, eine Menge von der Mächtigkeit der Zahlenclasse* (I) *bilden.*

§ 12.

Das erste, was wir nun zu zeigen haben, ist der Satz, *dass die neue Zahlenclasse* (II) *eine Mächtigkeit hat, welche von derjenigen der ersten Zahlenclasse* (I) *verschieden ist.*

Dieser Satz ergiebt sich aus dem folgenden Satze:

„Ist $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\nu$ *irgend* eine die erste Mächtigkeit habende Menge von verschiedenen Zahlen der *zweiten* Zahlenclasse (so dass wir befugt sind sie in jener einfachen Reihenform (α_ν) anzunehmen), so ist entweder eine von ihnen die grösste, sie sei γ, oder wenn dies nicht der Fall ist, so giebt es eine nicht unter den Zahlen α_ν vorkommende bestimmte Zahl β der zweiten Zahlenclasse (II), so dass β grösser ist als alle α_ν, dass dagegen jede ganze Zahl $\beta' < \beta$ von gewissen Zahlen der Reihe (α_ν) in der Grösse übertroffen wird; die Zahlen γ resp. β können füglich die obere Grenze der Menge (α_ν) genannt werden.“

Der Beweis dieses Satzes ist einfach folgender: sei α_{x_2}, in der Reihe (α_ν) die zuerst vorkommende Zahl, welche grösser ist als α_1, α_{x_3} die zuerst vorkommende, welche grösser als α_{x_2}, ist u. s. f.

Man hat alsdann:

$$1 < x_2 < x_3 < x_4 < \cdots$$

$$\alpha_1 < \alpha_{x_2} < \alpha_{x_3} < \alpha_{x_4} < \cdots$$

und

$$\alpha_\nu < \alpha_{x_\lambda},$$

sobald

$$\nu < x_\lambda.$$

Hier kann es nun vorkommen, dass von einer gewissen Zahl α_{x_ϱ} an alle in der Reihe (α_ν) auf sie folgenden kleiner sind als sie; dann ist sie offenbar die grösste von allen und wir haben: $\gamma = \alpha_{x_\varrho}$. Andernfalls denke man sich die Menge aller ganzen Zahlen von 1 an, die kleiner sind als α_1, füge zu dieser Menge zunächst die Menge aller ganzen Zahlen, welche $\geq \alpha_1$, und $< \alpha_{x_2}$, alsdann die Menge aller Zahlen, welche $\geq \alpha_{x_2}$, und $< \alpha_{x_3}$, u. s. f., so erhält man einen bestimmten Theil succedirender Zahlen unserer ersten beiden Zahlclassen und zwar ist diese Zahlenmenge offenbar von der *ersten* Mächtigkeit und es existirt daher (der Definition von (II) zufolge) eine bestimmte Zahl β des Inbegriffes (II), welche die jenen Zahlen nächst grössere ist. Es ist also $\beta > \alpha_{x_\lambda}$, und daher auch: $\beta > \alpha_\nu$, weil x_λ immer so gross angenommen werden kann, dass es grösser wird als ein vorgegebenes ν und weil alsdann: $\alpha_\nu < \alpha_{x_\lambda}$.

Andrerseits sieht man leicht, dass jede Zahl $\beta' < \beta$ von gewissen Zahlen α_{k_ν} der Grösse nach übertroffen wird; womit nun alle Theile des Satzes bewiesen sind.

Hieraus folgt nun der Satz, dass die Gesammtheit aller Zahlen der zweiten Zahlenclasse (II) nicht die Mächtigkeit von (I) hat; denn sonst würden wir uns den ganzen Inbegriff (II) in Form einer einfachen Reihe:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu, \dots$$

denken können, die nach dem soeben bewiesenen Satze entweder ein grösstes Glied γ haben oder von einer gewissen Zahl β aus (II) hinsichtlich der Grösse aller ihrer Glieder α, übertroffen werden würde; im ersten Falle würde die zur Classe (II) gehörige Zahl $\gamma + 1$, im zweiten Falle die Zahl β einerseits zur Classe (II) gehörig sein, andrerseits nicht in der Reihe (α_ν) vorkommen, was bei der vorausgesetzten Identität der Mengen (II) und (α_ν) ein Widerspruch ist; folglich hat die Zahlenclasse (II) eine andere Mächtigkeit als die Zahlenclasse (I).

Dass von den beiden Mächtigkeiten der Zahlenclassen (I) und (II) wirklich die zweite die auf die erste *nächst folgende* ist, d. h. dass zwischen beiden Mächtigkeiten keine anderen existiren, geht mit Bestimmtheit aus einem Satze hervor, den ich sogleich angeben und beweisen will.

Werfen wir jedoch vorher einen Blick rückwärts und vergegenwärtigen uns die Mittel, welche sowohl zu einer Erweiterung des realen ganzen Zahlbegriffs, wie auch zu einer neuen von der ersten verschiedenen Mächtigkeit wohldefinirter Mengen geführt haben, so waren es drei hervorspringende, von einander zu unterscheidende logische Momente, die zur Wirksamkeit kamen. Es sind die *beiden* oben definirten *Erzeugungsprincipe* und ein zu diesen hinzukommendes *Hemmungs-* oder *Beschränkungsprincip*, welches in der Forderung besteht, nur dann mit Hülfe eines der beiden anderen Principe die Schöpfung einer neuen ganzen Zahl vorzunehmen, wenn die Gesammtheit aller voraufgegangenen Zahlen die Mächtigkeit einer, ihrem ganzen Umfange nach bereits verhandenen, definirten Zahlenclasse hat. Auf diesem Wege, mit Beobachtung dieser drei Principe kann man mit der grössten Sicherheit und Evidenz zu immer neuen Zahlenclassen und mit ihnen zu allen in der körperlichen und geistigen Natur vorkommenden, verschiedenen, successive aufsteigenden Mächtigkeiten gelangen und die hierbei erhaltenen neuen Zahlen sind dann immer durchaus von derselben concreten Bestimmtheit und gegenständlichen Realität wie die früheren; ich wüsste daher fürwahr nicht, was uns von dieser Thätigkeit des Bildens neuer Zahlen zurückhalten sollte, sobald es sich zeigt, dass für den Fortschritt der Wissenschaften die Einführung einer neuen von diesen unzähligen Zahlenclassen in die Betrachtungen wünschenswerth oder sogar unentbehrlich geworden ist.

§ 13.

Ich komme nun zu dem versprochenen Nachweise, dass die Mächtigkeiten von (I) und von (II) unmittelbar einander folgen, so dass keine anderen Mächtigkeiten dazwischen liegen.

Wenn man aus dem Inbegriffe (II) nach irgend einem Gesetze eine Menge (α') von verschiedenen Zahlen α' auswählt, d. h. irgend eine in (II) enthaltene Menge (α') sich denkt, so hat eine solche Menge stets Eigenthümlichkeiten die sich in den folgenden Sätzen zum Ausdruck bringen lassen.

„Unter den Zahlen der Menge (α') giebt es immer eine *kleinste*.“

„Hat man im Besonderen eine Folge von Zahlen des Inbegriffes (II): $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\beta, \ldots$, die ihrer Grösse nach fortwährend abnehmen (so dass $\alpha_\beta > \alpha_{\beta'}$ wenn $\beta' > \beta$), so bricht diese Reihe nothwendig mit einer endlicher Gliederzahl ab und schliesst mit der kleinsten der Zahlen; die Reihe kann keine unendliche sein.“

Es ist bemerkenswerth, dass dieser Satz, welcher, wenn die Zahlen α_β endliche ganze Zahlen sind, unmittelbar klar ist, sich auch in dem Falle unendlicher Zahlen α_β nachweisen lässt. In der That nach dem vorigen Satze, der aus der Definition der Zahlenreihe (II) sich leicht ergiebt, ist unter den Zahlen α_ν, wenn man nur diejenigen von ihnen ins Auge fasst, bei denen der Index ν endlich ist, eine kleinste vorhanden; ist diese etwa = α_ϱ, so ist einleuchtend, dass, wegen $\alpha_\nu > \alpha_{\nu+1}$, die Reihe α_ν, und somit auch die ganze Reihe α_β genau aus ϱ Gliedern bestehen muss, also eine endliche Reihe ist.

Nun erhält man folgenden Fundamentalsatz:

„Ist (α') irgend eine in dem Inbegriffe (II) enthaltene Zahlenmenge, so können nur folgende drei Fälle vorkommen: entweder (α') ist ein endlicher Inbegriff, d. h. besteht aus einer endlichen Anzahl von Zahlen, oder es hat (α') die Mächtigkeit erster Classe oder drittens es hat (α') die Mächtigkeit von (II); Quartum non datur.“

Der Beweis lässt sich folgendermaassen einfach führen: sei Ω die erste Zahl der *dritten* Zahlenclasse (III); es sind alsdann sämmtliche Zahlen α' der Menge (α'), weil letztere in (II) enthalten ist, kleiner als Ω.

Wir denken uns nun die Zahlen α' ihrer Grösse nach geordnet; α_ω sei die kleinste unter ihnen, $\alpha_{\omega+1}$ die nächst grössere u. s. f., so erhält man die Menge (α') in der Form einer „wohlgeordneten“ Menge α_β, wo β Zahlen unserer natürlichen erweiterten Zahlenreihe von ω an durchläuft; offenbar bleibt hierbei β immer kleiner oder gleich α_β und da $\alpha_\beta < \Omega$, so ist also auch $\beta < \Omega$. Die Zahl β kann also nicht über die Zahlenclasse (II) hinausgehen, sondern verharrt innerhalb des Gebietes derselben; es können daher nur drei Fälle stattfinden: entweder es bleibt β unterhalb einer angebbaren Zahl der Reihe $\omega + \upsilon$, alsdann ist (α') eine endliche Menge; oder es nimmt β alle Werthe der Reihe $\omega + \upsilon$, bleibt aber unterhalb einer angebbaren Zahl der Reihe

(II), alsdann ist (α') offenbar eine Menge von der *ersten* Mächtigkeit; oder drittens es nimmt β auch beliebig grosse Werthe in (II) an, alsdann durchläuft β *alle* Zahlen von (II); in diesem letzten Falle hat der Inbegriff (α_β), d. h. die Menge (α') offenbar die Mächtigkeit von (II); w. z. b. w.

Als unmittelbares Ergebniss des soeben bewiesenen Satzes erscheinen nun die folgenden:

„Hat man irgend eine wohldefinirte Menge M von der Mächtigkeit der Zahlenclasse (II) und nimmt irgend eine unendliche Theilmenge M' von M, so lässt sich der Inbegriff M' entweder in Form einer einfach unendlichen Reihe denken, oder es ist möglich die beiden Mengen M' und M gegenseitig eindeutig auf einander abzubilden."

„Hat man irgend eine wohldefinirte Menge M von der zweiten Mächtigkeit, eine Theilmenge M' von M und eine Theilmenge M'' von M' und weiss man, dass die letztere M'' gegenseitig eindeutig abbildbar ist auf die erste M, so ist immer auch die zweite M' gegenseitig eindeutig abbildbar auf die erste und daher auch auf die dritte."

Ich spreche diesen letzten Satz hier, wegen des Zusammenhanges mit den vorangehenden, unter der Voraussetzung aus, dass M die Mächtigkeit von (II) hat; offenbar ist er auch dann richtig, wenn M die Mächtigkeit von (I) hat; es scheint mir aber höchst bemerkenswerth und hebe ich es daher ausdrücklich hervor, dass dieser Satz *allgemeine* Gültigkeit hat, gleich viel welche Mächtigkeit der Menge M zukommen mag. Darauf will ich in einer späteren Abhandlung näher eingehen und alsdann das eigenthümliche Interesse nachweisen, welches sich an diesen allgemeinen Satz knüpft.

§ 14.

Ich will nun noch zum Schlusse die Zahlen der zweiten Zahlenclasse (II) und die mit ihnen ausführbaren Operationen einer Betrachtung unterwerfen, wobei ich mich aber bei dieser Gelegenheit nur auf das Nächstliegende beschränken will, indem ich mir die Veröffentlichung eingehender Untersuchungen darüber auf später vorbehalte.

Die Operationen des Addirens und Multiplicirens habe ich in § 1 allgemein definirt und gezeigt, dass sie für die unendlichen ganzen Zahlen im Allgemeinen *nicht* dem commutativen, wohl aber dem associativen Gesetze unterworfen sind; dies gilt also im Besondern auch für die Zahlen der zweiten Zahlenclasse. Hinsichtlich des distributiven Gesetzes, so ist dasselbe nur in der folgenden Form allgemein gültig:

$$(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$$

(wo $\alpha+\beta$, α, β als Multiplicatoren auftreten),

wie man aus der inneren Anschauung unmittelbar erkennt.

Die Subtraction kann nach zwei Seiten hin betrachtet werden. Sind α und β irgend zwei ganze Zahlen, $\alpha < \beta$, so überzeugt man sich leicht, dass die Gleichung:

$$\alpha + \xi = \beta$$

immer eine und nur eine Auflösung nach ξ zulässt, wo, wenn α und β Zahlen aus (II) sind, ξ eine Zahl aus (I) oder (II) sein wird. Diese Zahl ξ werde gleich $\beta - \alpha$ gesetzt.

Betrachtet man hingegen die folgende Gleichung:

$$\xi + \alpha = \beta$$

so zeigt sich, dass dieselbe oft nach ξ gar nicht lösbar ist, z. B. tritt dieser Fall bei folgender Gleichung ein:

$$\xi + \omega = \omega + 1$$

Aber auch in denjenigen Fällen, wo die Gleichung: $\xi + \alpha = \beta$ nach lösbar ξ ist, findet es sich oft, dass sie durch unendlich viele Zahlwerthe von ξ befriediget wird; von diesen verschiedenen Auflösungen wird aber immer eine die kleinste sein.

Für diese kleinste Wurzel der Gleichung:

$$\xi + \alpha = \beta,$$

falls letztere überhaupt lösbar ist, wählen wir die Bezeichnung $\underline{\beta}_\alpha$, was also von $\beta - \alpha$, welche letztere Zahl immer vorhanden ist wenn nur $\alpha < \beta$, im Allgemeinen verschieden ist.

Besteht ferner zwischen drei ganzen Zahlen β, α, γ die Gleichung:

$$\beta = \gamma\alpha$$

(wo γ Multiplicator ist), so überzeugt man sich leicht, dass die Gleichung:

$$\beta = \xi\alpha$$

nach ξ keine andere Auflösung hat als $\xi = \gamma$ und man bezeichnet in diesem Falle γ durch $\frac{\beta}{\alpha}$.

Hingegen findet man, dass die Gleichung:

$$\beta = \alpha\xi$$

(wo ξ Multiplicandus ist), wenn sie überhaupt auflösbar nach ξ ist, oft mehrere und selbst unendlich viele Wurzeln hat, von denen aber eine immer die kleinste ist; diese kleinste der Gleichung: $\beta = \alpha\xi$, falls letztere überhaupt auflösbar ist, genügende Wurzel werde mit:

$$\frac{\underline{\beta}}{\alpha}$$

bezeichnet.

Die Zahlen α der zweiten Zahlenclasse sind zweierlei Art: 1) solche α, welche ein ihnen nächstvorangehendes Glied in der Reihe haben, welches alsdann $\underline{\alpha}_1$, ist, diese Zahlen nenne ich von der ersten Art. 2) solche α, welche ein ihnen nächstvorangehendes Glied in der Reihe nicht haben, für welche also $\underline{\alpha}_1$ nicht existirt;

diese Zahlen nenne ich von der *zweiten* Art. Die Zahlen $\omega, 2\omega, \omega^\nu + \omega, \omega^\omega$ sind beispielsweise von der zweiten Art, dagegen $\omega + 1, \omega^2 + \omega + 2, \omega^\omega + 3$ von der ersten Art sind.

Dem entsprechend zerfallen auch die Primzahlen der zweiten Zahlenclasse, welche ich allgemein in § 1 definirt, in Primzahlen der zweiten und in solche der ersten Art.

Primzahlen der zweiten Art sind in der Reihenfolge ihres Auftretens in der Zahlenclasse (II) folgende:

$$\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^2}, \omega^{\omega^3}, \ldots,$$

so dass unter allen Zahlen der Form:

$$\varphi = \nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \cdots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu$$

nur die *eine* Primzahl ω der *zweiten* Art vorhanden ist; man schliesse aber nicht aus dieser verhältnissmässig spärlichen Vertheilung der Primzahlen zweiter Art, dass der Inbegriff von ihnen allen eine geringere Mächtigkeit habe als die Zahlenclasse (II) selbst; es findet sich, dass dieser Inbegriff dieselbe Mächtigkeit hat wie (II).

Die Primzahlen erster Art sind zunächst:

$$\omega + 1, \omega^2 + 1, \ldots, \omega^\mu + 1, \ldots$$

Dieses sind die einzigen Primzahlen erster Art, welche unter den soeben mit φ bezeichneten Zahlen vorkommen; die Gesammtheit aller Primzahlen erster Art in (II) hat gleichfalls die Mächtigkeit von (II).

Die Primzahlen der zweiten Art haben eine Eigenschaft, welche ihnen einen ganz aparten Charakter giebt; ist η eine solche Primzahl (zweiter Art), so ist stets $\eta\alpha = \eta$, wenn α irgend eine Zahl kleiner als η ist; daraus folgt, dass, wenn α und β irgend zwei Zahlen sind, die beide kleiner als η, alsdann immer auch das Product $\alpha\beta$ kleiner ist als η.

Beschränken wir uns hier zunächst auf die Zahlen der zweiten Zahlenclasse, welche die Form φ haben, so finden sich für diese folgende Additions- und Multiplicationsregeln. Sei:

$$\varphi = \nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \cdots + \nu_\mu$$

$$\psi = \varrho_0\omega^\lambda + \varrho_1\omega^{\lambda-1} + \cdots + \varrho_\lambda,$$

wo wir ν_0 und ϱ_0 von Null verschieden voraussetzen.

Addition.

1) Ist $\mu < \lambda$, so hat man:

$$\varphi + \psi = \psi$$

2) Ist $\mu > \lambda$, so hat man:

$$\varphi + \psi = \nu_0\omega^\mu + \cdots + \nu_{\mu-\lambda-1}\omega^{\lambda+1} + (\nu_{\mu-\lambda} + \varrho_0)\omega^\lambda + \varrho_1\omega^{\lambda-1} + \varrho_2\omega^{\lambda-2} + \cdots + \varrho_\lambda$$

3) Für $\mu = \lambda$, ist:

$$\varphi + \psi = (\nu_0 + \varrho_0)\omega^\lambda + \varrho_1\omega^{\lambda-1} + \cdots + \varrho_\lambda$$

Multiplication.

1) Ist ν_μ von Null verschieden, so hat man:

$$\varphi\psi = \nu_0\omega^{\mu+\lambda} + \nu_1\omega^{\mu+\lambda-1} + \cdots + \nu_{\mu-1}\omega^{\lambda+1} + \nu_\mu\varrho_0\omega^\lambda + \varrho_1\omega^{\lambda-1} + \cdots + \varrho_\lambda$$

Falls $\lambda = 0$ ist das letzte Glied rechterseits: $\nu_\mu\varrho_0$.

2) Ist $\nu_\mu = 0$, so hat man:

$$\varphi\psi = \nu_0\omega^{\mu+\lambda} + \nu_1\omega^{\mu+\lambda-1} + \cdots + \nu_{\mu-1}\omega^{\lambda+1} = \varphi\omega^\lambda.$$

Die Zerlegung einer Zahl φ in ihre Primfactoren ist folgende. Hat man:

$$\varphi = c_0\omega^\mu + c_1\omega^{\mu_1} + c_2\omega^{\mu_2} + \cdots + c_\sigma\omega^{\mu_\sigma}$$

wo

$$\mu > \mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_\sigma$$

und

$$c_0, c_1, \ldots c_\sigma$$

von Null verschiedene positive endliche Zahlen sind, so ist:

$$\varphi = c_0(\omega^{\mu-\mu_1} + 1)c_1(\omega^{\mu_1-\mu_2} + 1)c_2 \ldots c_{\sigma-1}(\omega^{\mu_{\sigma-1}-\mu_\sigma} + 1)c_\sigma\omega^{\mu_\sigma};$$

denkt man sich noch $c_0, c_1, \ldots c_{\sigma-1}c_\sigma$ nach den Regeln der ersten Zahlenclasse in Primfactoren zerlegt, so hat man alsdann die Zerlegung von φ in Primfactoren; denn die Factoren $\omega^x + 1$, und ω sind, wie oben bemerkt, selbst Primzahlen. Diese Zerlegung von Zahlen der Form ist φ einzig bestimmt, auch hinsichtlich der Reihenfolge der Factoren, wenn man von der Commutabilität der Primfactoren innerhalb der einzelnen c abstrahirt und wenn bestimmt wird, dass der letzte Factor eine Potenz von ω oder gleich Eins sein soll und dass ω nur an der letzten Stelle Factor sein darf. Ueber die Verallgemeinerung dieser Zerlegung in Primfactoren auf beliebige Zahlen α der zweiten Zahlenclasse (II) werde ich bei einer späteren Gelegenheit schreiben.

Anmerkungen.

Zu § 1.

1) *Mannichfaltigkeitslehre*. Mit diesem Worte bezeichne ich einen sehr viel umfassenden Lehrbegriff, den ich bisher nur in der speciellen Gestaltung einer arithmetischen oder geometrischen Mengenlehre auszubilden versucht habe. Unter einer Mannichfaltigkeit oder Menge verstehe ich nämlich allgemein jedes Viele, welches sich als Eines denken lässt, d. h. jeden Inbegriff bestimmter Elemente, welcher durch ein Gesetz zu einem Ganzen verbunden werden kann und ich glaube hiermit etwas zu definiren, was verwandt ist mit dem Platonischen *εἶδος* oder *ἰδέα*, wie auch mit dem, was Platon in seinem Dialoge „Philebos oder das höchste Gut“ *μικτόν* nennt. Er setzt dieses dem *ἄπειρον*, d. h. dem Unbegrenzten, Unbestimmten, welches ich Uneigentlich-unendliches nenne, sowie dem *πέρας* d.h. der Grenze entgegen und erklärt es als ein geordnetes „Gemisch“ der beiden letzteren. Dass diese Begriffe Pythagoreischen Ursprungs sind, deutet Platon selbst an; man vergleiche A. Boeckh, Philolaos des Pythagoreers Lehren. Berlin 1819.

Zu § 4.

2) *Aristoteles*. Man vergleiche die Darstellung Zellers in seinem grossen Werke: „Die Philosophie der Griechen, III. Aufl., II. Theil, 2. Abth. pag. 393 bis 403. Die Auffassung Platons vom Unendlichen ist eine ganz andere, wie die des Aristoteles; denn man vergleiche Zeller II. Theil, 1. Abth. pag. 628-646. Ebenso finde ich für meine Auffassungen Berührungspunkte in der Philosophie des Nicolaus Cusanus. Man vgl.: R. Zimmermann, der Cardinal Nicolaus von Cusa als Vorgänger Leibnizens (Sitzungsberichte d. Wiener Akademie d. Wiss. Jahrg. 1852). Dasselbe bemerke ich in Beziehung auf Giordano Bruno, den Nachfolger des Cusaners. Man vergl. Brunnhofer, Giordano Bruno's Weltanschauung und Verhängniss. Leipzig 1882.

Ein wesentlicher Unterschied besteht aber darin, dass ich die verschiedenen Abstufungen des Eigentlich-unendlichen durch die Zahlenclassen (I), (II), (III) u. s. w. ein für allemal dem Begriffe nach fixire und es erst nun als Aufgabe betrachte, die Beziehungen der überendlichen Zahlen nicht nur mathematisch zu untersuchen, sondern auch allüberall, wo sie in der Natur vorkommen, nachzuweisen und zu verfolgen. Dass wir auf diesem Wege immer weiter, niemals an eine unübersteigbare Grenze, aber auch zu keinem auch nur angenäherten Erfassen des Absoluten gelangen werden, unterliegt für mich keinem Zweifel. Das Absolute kann nur anerkannt, aber nie erkannt, auch nicht annähernd erkannt werden. Denn wie man innerhalb der ersten Zahlenclasse (I) bei jeder noch so grossen endlichen Zahl immer dieselbe Mächtigkeit der ihr grösseren endlichen Zahlen vor sich hat, ebenso folgt auf jede noch so grosse überendliche Zahl irgend einer der höheren Zahlenclassen (II) oder (III) u. s. w. ein Inbegriff von Zahlen und Zahlenclassen, der an Mächtigkeit nicht das Mindeste eingebüsst hat gegen das Ganze des von 1 anfangenden absolut unendlichen Zahleninbegriffs. Es verhält sich damit ähnlich, wie Albrecht von Haller von der Ewigkeit sagt: „ich zieh' sie ab [die ungeheure Zahl] und Du [die Ewigkeit] liegst ganz vor mir.“ Die absolut unendliche Zahlenfolge erscheint mir daher in gewissem Sinne als ein geeignetes Symbol des Absoluten; wogegen die Unendlichkeit der ersten Zahlenclasse (I), welche bisher dazu allein gedient hat, mir, eben weil ich sie für eine fassbare Idee (nicht Vorstellung) halte, wie ein ganz verschwindendes Nichts im Vergleich mit Jener vorkommt. Bemerkenswerth erscheint mir auch dieses, dass jede der Zahlenclassen, also auch jede der Mächtigkeiten, einer ganz bestimmten Zahl des absolut-unendlichen Zahleninbegriffs zugeordnet ist und zwar so, dass auch zu jeder überendlichen

Zahl γ eine Mächtigkeit vorhanden ist, welche die γ^{te} zu nennen ist; es bilden also auch die verschiedenen Mächtigkeiten eine absolutunendliche Folge. Dies ist um so merkwürdiger, als die Zahl γ, welche die Ordnung einer Mächtigkeit angiebt (falls die Zahl γ eine ihr nächst vorangehende hat) zu den Zahlen derjenigen Zahlenclasse, welche diese Mächtigkeit hat, in einem Grössenverhältniss steht, dessen Kleinheit jeglicher Beschreibung spottet und dies umsomehr, je grösser γ angenommen wird.

Zu § 5.

3) *determinari possunt*. Dem Unbestimmten, Veränderlichen, Uneigentlich-unendlichen, in welcher Form sie auch erscheinen, kann ich kein Sein zuschreiben, denn sie sind nichts als entweder Beziehungsbegriffe oder rein subjective Vorstellungen resp. Anschauungen (imaginationes), in keinem Falle adäquate Ideen. Wenn also nur das Uneigentlich-unendliche in dem Satze „infinitum actu non datur“ gemeint wäre, so könnte ich ihn unterschreiben, er wäre aber alsdann ein rein tautologischer. Der Sinn dieses Satzes scheint mir aber an den bezeichneten Quellen vielmehr der zu sein, dass durch ihn die Unmöglichkeit des begrifflichen Setzens einer bestimmten Unendlichkeit ausgesprochen werden soll und in dieser Bedeutung halte ich ihn für falsch.

Zu § 7.

4) *Realisten*. Man findet den positivistischen und realistischen Standpunkt in Bezug auf das Unendliche beispielsweise in: Dühring, natürliche Dialectik, Berlin 1865, pag. 109-135 und in v. Kirchmann, Katechismus der Philosophie pag. 124 bis 130 auseinandergesetzt. Man vergleiche auch Ueberweg's Anmerkungen zu Berkeley's Abhandl. über d. Princ. der menschlichen Erkenntniss in v. Kirchmann's philosophischer Bibliothek, Ich kann nur wiederholen, dass in der Würdigung des Uneigentlich-unendlichen ich im Wesentlichen mit allen diesen Autoren übereinstimme; der Differenzpunkt liegt nur darin, dass von ihnen dieses synkategorematische Unendliche für das einzige durch „Wendungen“ oder Begriffe, und hier sogar durch blosse Beziehungsbegriffe fassbare Unendliche angesehen wird. Die Beweise Dühring's gegen das Eigentlich-unendliche könnten mit viel weniger Worten geführt werden und scheinen mir entweder darauf hinauszulaufen, dass die bestimmte endliche Zahl, wenn sie auch noch so gross gedacht wird, niemals eine unendliche sein kann, was aus ihrem Begriff unmittelbar folgt oder darauf, dass die veränderliche unbeschränkt grosse endliche Zahl nicht mit dem Prädicate der Bestimmtheit und daher auch nicht mit dem Prädicate des Seins gedacht werden kann, was wiederum aus dem Wesen der Veränderlichkeit unmittelbar sich ergiebt. Dass hiermit gegen die Denkbarkeit bestimmter überendlicher Zahlen nicht das Geringste ausgemacht sei, ist für mich nicht zweifelhaft; und dennoch werden jene Beweise für Beweise gegen die Realität überendlicher Zahlen gehalten. Mir erscheint diese Argumentation ähnlich wie wenn man daraus, dass es unzählig viele Intensitäten des Grünen giebt, schliessen wollte, dass es kein Rothes geben könne. Merkwürdig ist es aber allerdings, dass Dühring auf pag. 126 seiner Schrift selbst zugesteht, dass für die Erklärung der „Möglichkeit der unbeschränkten Synthesis“ ein Grund vorhanden sein muss, den er als „begreiflicher Weise völlig unbekannt“ bezeichnet. Hierin liegt, wie mir scheint, ein Widerspruch.

Ebenso finden wir aber auch, dass dem Idealismus nahestehende oder selbst ihm ganz huldigende Denker den bestimmt-unendlichen Zahlen jede Berechtigung versagen.

Chr. Sigwart in seinem ausgezeichneten Werke: Logik, II, Bd. Die Methodenlehre (Tübingen 1878) argumentirt ganz ebenso wie Dühring und sagt auf pag. 47: „eine unendliche Zahl ist eine Contradictio in adjecto“.

Aehnliches findet sich bei Kant und J. F. Fries; man vergleiche des letzteren: System der Metaphysik (Heidelberg 1824) in § 51 u. § 52. Auch die Philosophen der Hegel'schen Schule lassen die eigentlich-unendlichen Zahlen nicht gelten; ich führe nur das verdienstvolle Werk von K, Fischer an, sein System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre, 2. Aufl. (Heidelberg 1865) pag. 275.

Zu § 8.

5) Was ich hier intrasubjective oder immanente Realität von Begriffen oder Ideen nenne, dürfte mit der Bestimmung „adäquat“ in derjenigen Bedeutung, wie dieses Wort von Spinoza gebraucht wird, übereinstimmen, indem er sagt: Eth. pars II def. IV, „Per ideam adaequatam intelligo ideam, quae, quatenus in se sine relatione ad objectum consideratur, omnes verae ideae proprietates sive denominationes intrinsecas habet.“

6) Diese Ueberzeugung stimmt im Wesentlichen sowohl mit den Grundsätzen des Platonischen Systems, wie auch mit einem wesentlichen Zuge des Spinozaschen Systems überein; in ersterer Beziehung verweise ich auf Zeller, Philos. d. Griechen, 3. Aufl. 2. Theil 1. Abth. pag. 541-602. Es heisst hier gleich im Anfange des Abschnittes: „Nur das begriffliche Wissen soll (nach Plato) eine wahre Erkenntniss gewähren. So viel aber unsern Vorstellungen Wahrheit zukommt – diese Voraussetzung theilt Plato mit andern (Parmenides) – ebensoviel muss ihrem Gegenstand Wirklichkeit zukommen, und umgekehrt. Was sich erkennen lässt, ist, was sich nicht erkennen lässt, ist nicht, und in demselben Masse, in dem etwas ist, ist es auch erkennbar.“

Hinsichtlich Spinozas brauche ich nur an seinen Satz in Ethik, pars II, prop. VII zu erinnern: „ordo et connexio idearum idem est ac ordo et connexio rerum.“

Auch in der Leibnizschen Philosophie lässt sich dasselbe erkenntnisstheoretische Princip nachweisen. Erst seit dem neueren Empirismus, Sensualismus und Skepticismus, sowie dem daraus hervorgegangenen Kantischen Kriticismus glaubt man die Quelle des Wissens und der Gewissheit in die Sinne oder doch in die sogenannten reinen Anschauungsformen der Vorstellungswelt verlegen und auf sie beschränken zu müssen; meiner Ueberzeugung nach liefern diese Elemente durchaus keine sichere Erkenntniss, weil letztere nur durch Begriffe und Ideen erhalten werden kann, die von äusserer Erfahrung höchstens angeregt, der Hauptsache nach durch innere Induction und Deduction gebildet werden als Etwas, was in uns gewissermassen schon lag und nur geweckt und zum Bewusstsein gebracht wird.

Zu § 8, 7 und 9, 8.

Der Vorgang bei der correcten Bildung von Begriffen ist m. E. überall derselbe; man setzt ein eigenschaftsloses Ding, das zuerst nichts anderes ist, als ein Name oder ein Zeichen A und giebt demselben ordnungsmässig verschiedene, selbst unendlich viele verständliche Prädicate, deren Bedeutung an bereits vorhandenen Ideen bekannt ist und die einander nicht widersprechen dürfen, dadurch werden die Beziehungen von A zu den bereits vorhandenen Begriffen und namentlich zu den verwandten bestimmt; ist man hiermit vollständig zu Ende, so sind alle Bedingungen zur Weckung des Begriffes A, welcher in uns geschlummert, vorhanden und er tritt fertig ins Dasein, versehen mit der intrasubjectiven Realität, welche überall von Begriffen nur verlangt werden kann; seine transiente Bedeutung zu constatiren ist alsdann Sache der Metaphysik.

Zu § 10.

9) Thomas von Aquino, Opuscula, XLII de natura generis, cap. 19 et 20; LII de natura loci; XXXII de natura materiae et de dimensionibus interminatis. Man vergleiche: C.Jourdin, la Philosophie de Saint Thomas d'Aquin, pag. 303-329; K. Werner, der heilige Thomas von Aquino (Regensburg 1859), 2. Bd. p. 177-201.

10) Selbst der Inbegriff aller stetigen, aber auch derjenige aller integrirbaren Functionen einer oder mehrerer Veränderlichen dürfte nur die Mächtigkeit der zweiten Zahlenclasse (II) haben; lässt man jedoch alle Beschränkungen fallen und betrachtet den Inbegriff aller stetigen und unstetigen Functionen einer oder mehrerer Veränderlichen, so hat diese Menge die Mächtigkeit der dritten Zahlenclasse (III).

11) Von den perfecten Mengen lässt sich der Satz beweisen, dass sie die Mächtigkeit von (I) niemals haben.

Als ein Beispiel einer perfecten Punctmenge, die in keinem noch so kleinen Intervall überall dicht ist, führe ich den Inbegriff aller reellen Zahlen an, die in der Formel:

$$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \cdots + \frac{c_\nu}{3^\nu} + \cdots$$

enthalten sind, wo die Coefficienten c_ν, nach Belieben die beiden Werthe 0 und 2 anzunehmen haben und die Reihe sowohl ans einer endlichen, wie aus einer unendlichen Anzahl von Gliedern bestehen kann.

12) Man beachte, dass diese Definition eines Continuums frei ist von jedem Hinweis auf das, was man die Dimension eines stetigen Gebildes nennt; die Definition umfasst nämlich auch solche Continua, die aus zusammenhängenden Stücken verschiedener Dimension, wie Linien, Flächen, Körper etc. bestehen. Bei einer späteren Gelegenheit will ich zeigen, wie man von diesem allgemeinen Continuum zu den spezielleren Continuis mit bestimmter Dimension ordnungsmässig hinkommt. Ich weiss sehr wohl, dass das Wort „*Continuum*“ in der Mathematik eine *feste* Bedeutung bisher *nicht* angenommen hat; es wird daher meine Definition desselben von Einigen als zu *eng*, von Anderen als zu *weit* beurtheilt werden; hoffentlich ist es mir gelungen, dabei die *richtige Mitte* zu finden.

Nach meiner Auffassung kann unter einem *Continuum* nur ein *perfectes* und *zusammenhängendes* Gebilde verstanden werden. Darnach sind beispielsweise eine gerade Strecke, welcher der eine oder beide Endpunkte fehlen, desgleichen eine Kreisfläche, von welcher die Begrenzung ausgeschlossen ist, keine *vollkommenen* Continua; ich nenne derartige Punktmengen *Semicontinua*.

Allgemein verstehe ich unter einem *Semicontinuum* eine *imperfecte*, *zusammenhängende* und zur *zweiten Classe* gehörige Punktmenge, welche so beschaffen ist, dass je zwei Punkte desselben durch ein *vollkommenes* Continuum, welches ein Bestandtheil der Punktmenge ist, verbunden werden können. So ist z. B. der in Bd. XX, pag. 119 der Math. Annalen von mir mit 𝔄 bezeichnete Raum, welcher aus G_n durch Entfernung irgend einer Punktmenge *erster* Mächtigkeit entsteht, ein *Semicontinuum*.

Die *Ableitung* einer zusammenhängenden Punktmenge ist *stets* ein *Continuum*, wobei es gleichgültig ist, ob die zusammenhängende Punktmenge die *erste* oder *zweite* Mächtigkeit hat.

Ist eine zusammenhängende Punktmenge von der *ersten* Mächtigkeit, so kann ich sie *weder* ein Continuum *noch* ein Semicontinuum nennen.

Durch die von mir an die Spitze der Mannichfaltigkeitslehre gestellten Begriffe mache ich mich anheischig, die sämmtlichen Gebilde der algebraischen sowohl wie der transcendenten Geometrie nach allen ihren Möglichkeiten zu erforschen, wobei die Allgemeinheit und Schärfe der Resultate von keiner andern Methode übertroffen werden dürften.