Liu Hui terrasse un monstre

Catégorie : **Homo Mathematicus**
Tags : **nombre, symbole, psychologie, algorithme**
Personnages : **Liu Hui, Karine Chemla, Ernst Cassirer, Aristote**

19 août 2017

Liu Hui, mathématicien chinois du IIIème siècle, terrasse l'un des premiers "monstres" mathématiques, le nombre irrationnel.

Dans un court article [1], Karine Chemla, sinologue et spécialiste d'histoire des mathématiques, relate au sujet des nombres irrationnels[2] un épisode très éclairant venu de la Chine du IIIème siècle et qui mérite le détour. Certains passages de cette note sont un peu mathématiques mais nous pensons que les non-mathématiciens pourront s'engager un peu et accéder à notre proposition finale : les trois « statuts » du nombre et la brève ouverture qui s'ensuit.

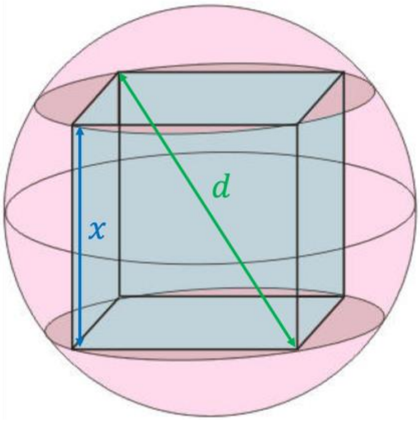
Cubes et sphère

Liu Hui était un mathématicien chinois du IIIème siècle, connu entre autres pour avoir publié, en 263 apr. J.-C., un commentaire sur le célèbre livre chinois « *Les neuf chapitres sur l'art mathématique* »[3].

---

1 Chemla Karine - *Des nombres irrationnels en Chine entre le premier et le troisième siècle* - In: Revue d'histoire des sciences, tome 45, n°1, 1992. pp. 135-140. Sauf indication contraire, toutes les citations proviennent de cet article.
2 Un nombre irrationnel est un nombre qui ne correspond à aucune proportion de la forme a/b où a et b sont des nombres entiers. Le célèbre nombre π, qui mesure le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre, est irrationnel.
3 Livre anonyme chinois de mathématiques, compilé entre le IIe siècle av. J.-C. et le Ier siècle av. J.-C. au début de la période Han sur la base de morceaux datant d'avant la dynastie Qin (Wikipédia).

Ce livre est davantage une compilation d'algorithmes pratiques, servant à résoudre divers problèmes concrets (architecture, commerce, taxes…), qu'un traité de mathématiques abstraites. Personne ne sait vraiment d'où proviennent ces connaissances algorithmiques. Les historiens semblent cependant s'accorder sur le fait qu'elles ont été élaborées indépendamment des mathématiques grecques.



Liu Hui présente notamment un algorithme qui permet de déduire le côté x d'un cube du diamètre d de la sphère dans laquelle il est inscrit (cette sphère est la plus petite qui contient le cube) :

> Si l'on effectue la multiplication du diamètre d de la sphère par lui-même et qu'on divise par 3, puis qu'on extrait la racine carrée de ceci, cela donne le côté x du cube inscrit dans la sphère.

Cette relation entre x et d correspond à la formule que nous écririons dans le langage mathématique d'aujourd'hui $x^2 = d^2/3$. Liu Hui utilise cette relation pour tenter de calculer le diamètre d de la sphère dans laquelle est inscrit un cube de côté $x = 5$. La formule précédente donne $d = \sqrt{3x^2} = \sqrt{75}$. Mais Liu Hui constate :

> En extrayant la racine carrée de la grande hypoténuse, on n'en vient pas à bout[4].

Disons pour simplifier que le calcul de $\sqrt{75}$ ne tombe pas juste. Comme une division sans fin, ce nombre (irrationnel) s'écrit avec une infinité de chiffres après la virgule.

Liu Hui veut pourtant poursuivre son calcul pour accéder au volume du cube circonscrit (le cube le plus petit contenant la sphère). Le côté de ce cube est égal au diamètre d de la sphère et donc son volume vaut d^3. C'est à ce moment du récit relaté par Karine Chemla que Liu Hui accomplit un saut conceptuel emblématique de la pensée mathématique. Mais aussi de la pensée tout court...

---

[4] Karine Chemla ne relate pas dans son article ce que Liu Hui entend par « *on n'en vient pas à bout* ». On peut imaginer qu'il a exécuté un algorithme itératif de calcul de la racine carrée un certain nombre de fois. Mais a-t-il vraiment eu la certitude qu'il était impossible « d'en venir à bout » (au sens d'une impossibilité mathématique) ou bien voulait-il simplement signifier que lui ne réussissait pas à en venir à bout et qu'il remettait la poursuite éventuelle du calcul à plus tard ?

Qu'à cela ne tienne...

L'extraction de la racine carrée (le calcul effectif de $\sqrt{75}$) est un procédé, un algorithme, qui agit sur un nombre 75) pour produire un autre nombre : le résultat cherché (notre calculatrice donne le résultat approché $\sqrt{75} = 8{,}660254\ldots$ mais elle non plus ne viendra jamais « à bout » de ce calcul).

Le saut conceptuel s'accomplit ici.

Liu Hui décide de conserver $\sqrt{75}$ à l'état de nombre latent, ou de nombre en puissance, et poursuit son calcul *avec ce signe* plutôt qu'avec 8,660254 … inachevé et donc inexact. Il est possible que la *figure* sensible du segment auquel ce nombre en puissance correspond, la grande hypoténuse, appelle Liu Hui à accorder à sa mesure, $\sqrt{75}$, le statut d'un nombre achevé, un nombre en acte, exact et légitime comme élément d'un calcul. Comme le relate Karine Chemla (nous soulignons) :

> Confronté à l'impossibilité d'extraire la racine d'un nombre selon un algorithme, Liu Hui <u>donne tout de même un résultat à l'opération</u>. Mais celui-ci est de nature différente de celui qu'aurait donné un calcul. On y renvoie, non pas en l'énonçant explicitement, mais <u>en lui donnant un nom</u>, plus exactement en donnant le nom de racine au nombre sur lequel on opère. Ce sera « racine de ».

L'intégration du nom (du nombre irrationnel) $\sqrt{75}$ dans le langage mathématique n'est pas encore l'intégration d'un nouveau type de nombre, conceptualisé et théorisé. Il s'agit plutôt de remettre à un plus tard indéfini l'exécution de l'algorithme et de considérer l'algorithme lui-même, assigné à une « entrée » et achevé ou pas, comme un objet mathématique. Ainsi, le « monstre », ce nombre jamais achevé, reste cadenassé dans le nom de l'algorithme et n'entrave pas la suite du calcul.

Effectivement, Liu Hui, ayant accompli ce saut conceptuel, peut poursuivre :

> Faire que la multiplication à deux reprises de son carré, 75 *chi*, par lui-même [soit $75 \times 75 \times 75 = 421875$] reçoive pour nom racine [on prend donc $\sqrt{421875}$], on obtient la racine de chi comme volume du cube circonscrit.

Effectivement, le volume du cube circonscrit vaut d^3, comme il a été dit plus haut, soit $\sqrt{75}^3 = \sqrt{75^3} = \sqrt{421875\}}$[5].

Le calcul effectif peut-être indéfiniment reporté ; ce nom du résultat est celui d'une valeur parfaitement exacte. Comme le dit Liu Hui lui-même :

> On ne peut déterminer la valeur de cette quantité, c'est pourquoi c'est seulement en lui donnant le nom de racine que l'on ne commet pas d'erreur.

[5] La règle, implicite dans l'article, de la multiplication des racines est utilisée par Liu Hui : $\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$.

Liu Hui n'a peut-être pas perçu l'irrationalité du nombre $\sqrt{75}$. Il lui est en tout cas apparu un calcul qui produit sans fin des chiffres (après la virgule dans notre système d'écriture). Il fait d'ailleurs lui-même le parallèle avec les fractions rationnelles, dont le calcul effectif peut aussi ne jamais s'arrêter :

> Par comparaison, c'est comme lorsque, divisant 10 par 3, on considère son reste comme un tiers ; on peut alors retrouver le nombre.

On peut en effet écrire $\frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$. Le nom « un tiers », soit $\frac{1}{3}$, potentialise le calcul et maintient en lui-même l'écriture infinie du nombre qu'il désigne[6], soit 0,3333 .... Il est en même temps exact où sens où les règles syntaxiques applicables construisent des programmes ou des algorithmes (des écritures symboliques) qui « enjambent » les calculs. Inutile en effet, heureusement, de calculer $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$ pour obtenir l'égalité exacte et finalement assez troublante :

$$3 \times \frac{1}{3} = 1$$

Les trois « statuts » du nombre

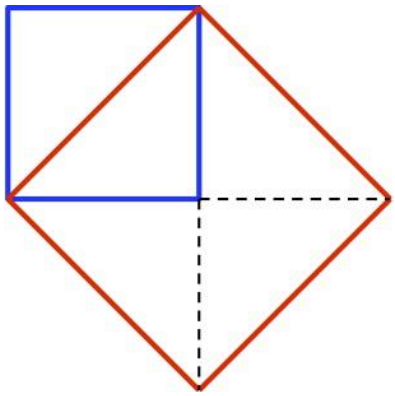
Liu Hui cherchant à calculer le volume du cube circonscrit d'une sphère contenant un cube de côté $\sqrt{5}$, propose d'enjamber le calcul impossible des résultats intermédiaires (dont « *on ne vient pas à bout* ») pour ne considérer que le jeu syntaxique conduisant à la solution exacte $\sqrt{421875}$, exprimée sous la forme d'un algorithme (de nom « $\sqrt{\quad}$ ») à appliquer à un nombre (421875).

Cet « astuce » est emblématique du saut conceptuel réalisé par les mathématiciens lorsque sont apparus des « monstres » mathématiques irreprésentables : un symbole (algorithme) leur est assigné, dans lequel ils restent confinés, et qui permet leur manipulation dans un langage abstrait.

Cette réflexion ouvre la possibilité d'un triple « statut » du nombre. Tout d'abord, le nombre comme **figure** sensible, pré-mathématique : une quantité ou une grandeur dans le monde perçu, obéissant à des régularités physiques. Puis, le nombre comme **procédure**, pourrait-on dire, à l'existence purement mathématique et obéissant à des règles de syntaxes reflétant ses régularités en tant que figure. Enfin, le nombre comme **écriture**, comme « monnaie » en quelque sorte, outil de transactions dans le monde réel et qui nécessite donc une traduction respectant une convention de signes (une base).

Rappelons-nous par exemple la figure permettant de comprendre la procédure de la racine carrée :

[6] L'infini de l'écriture n'est pas inéluctable pour un nombre rationnel. Par exemple, l'écriture du nombre $\frac{1}{3}$ est parfaitement finie chez les babyloniens : c'est 20 en base 60.



Si nous assignons une valeur « monnaie » (**écriture**) de 1 au côté du carré bleu (il faudrait alors attribuer une unité à cette valeur, comme le fait Liu Hui avec *chi*), la surface du carré bleu vaut 1. Quelle est alors la valeur « monnaie » du côté du carré rouge, c'est-à-dire la valeur avec laquelle il est possible de réaliser une transaction réelle (acheter une clôture pour le carré rouge, par exemple) ?

Visiblement (recollement des triangles figurés), la surface du carré rouge est le double de celle du bleu, et donc la valeur monnaie du côté du carré rouge est le nombre qui, multiplié par lui-même, donne 2. Il faut donc extraire la racine carrée de 2 et ce nombre est exactement la **procédure** $\sqrt{2}$, avec laquelle il est possible d'enchaîner, dans l'univers mathématique, d'autres calculs obéissant à des règles « grammaticale » du genre $\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$. Pour autant, nous ne pouvons pas réaliser de transactions dans le monde réel avec des procédures inaccomplies. Il faut bien finir par calculer $\sqrt{2}$ et écrire 1,41 (*chi*) pour commander et payer la clôture...

Brève ouverture

De nombreuses réflexions ont occupé les philosophes et mathématiciens depuis les pythagoriciens concernant, disons, l'ontologie du nombre[7]. Qu'est-il ce nombre et, nous serions tentés d'ajouter, est-il typique de l'homme ? Cette question, à l'heure du tout numérique, semble être une bonne question. Nous n'avons pas (encore) de réponse, mais ce court et emblématique raisonnement de Liu Hui nous montre comment nous créons naturellement des formes symboliques (des procédures, des algorithmes) pour emprisonner des « monstres », et comment ces formes finissent par s'autonomiser dans un monde réglé syntaxiquement.

Ernst Cassirer[8] décrit trois stades de cette autonomisation : le stade *mimétique* (la procédure racine carrée mime encore la figure sensible), le stade *analogique* (la procédure n'est plus liée à la figure sensible, la syntaxe règne) et le stade de *l'expression symbolique* :

> La fonction de signification accède à l'autonomie pure. Moins la forme linguistique aspire encore à offrir une copie, fût-elle directe ou indirecte, du monde des objets,

[7] Avec un peu de bagage mathématique, on pourra par exemple s'intéresser au livre récent de Frédéric Patras, « *La possibilité des nombres* », édité chez puf.
[8] Ernst Cassirer – 1997 – *Trois essais sur le symbolique - Œuvres VI*

> moins elle s'identifie avec l'être de ce monde et mieux elle accède à son rôle et son sens propre.

Et c'est toute la question, pour nous aujourd'hui, du nombre : le jeu syntaxique (de l'esprit, puis désormais des machines) produit sans cesse de nouvelles formes symboliques (éventuellement calculées puis écrites) dont l'accord avec le monde sensible n'est plus garanti par mimétisme. Nous accordons ces formes à nos « figures » a posteriori seulement et souvent de manière forcée. Si bien qu'il est devenu moins coûteux de conformer nos « figures » (y compris politiques et éthiques) elles-mêmes au puissant déferlement des formes numériques.

Notes

16 septembre 2017 – Retour à Aristote

C'est dans l'ouvrage collectif « *Philosophie et calcul de l'infini* » (édité chez Maspero), que l'on trouve p.45 l'extrait suivant, un écho à ce qui a été révélé avec Liu Hui (nous soulignons) :

> Il [Aristote] a parfois pressenti [...] que le temps engagé dans la composition ou la division n'était pas une notion claire – c'est même là, encore naissant, un moment fondamental du calcul infinitésimal, des grandes philosophies qui lui ont été associées et des mathématiques en général : si en effet l'opération ne doit pas être confondue avec son résultat, c'est-à-dire si l'opération est apparemment toujours <u>en puissance</u> quand il s'agit de la division ou de la composition in-définies par exemple, on peut retourner la proposition et voir que l'opération elle-même peut être au contraire maîtrisée en tant qu'opération, donc (dé)finie et infinie à la fois puisqu'elle maîtrise alors a priori un maniement indéfini tout à fait distinct d'elle. Aristote a ainsi aperçu [...] que l'opération doit être distinguée de son résultat, mais aussi de son maniement, ce dernier seul étant indéfini.

C'est donc à *La Physique* d'Aristote qu'il faudrait revenir pour consolider le principe d'une distinction entre procédure (opération, nombre en puissance) et écriture (résultat, nombre en acte). Mais n'oublions pas que cette distinction agit dans le symbolique et ne dit rien du nombre en tant qu'il se manifeste, sous la forme de figures sensibles, dans le monde réel.